Cualidades y procesos matemáticos importantes en la resolución de problemas: un caso hipotético de suministro de medicamento

Fernando Barrera Mora y Luz Manuel Santos Trigo
CINVESTAV - IPN, México

Noviembre de 2000.

Los autores agradecen a la Sociedad Matemática Mexicana y al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por el apoyo brindado durante el desarrollo de este trabajo, a través del Proyecto "Propósitos y Contenidos de la Enseñanza de la Matemática en el nivel medio superior"

Introducción

Las reformas recientes del currículo matemático a nivel preuniversitario reconocen la importancia de promover en los estudiantes el uso de varias estrategias para analizar diversas situaciones o problemas. Se afirma que en el estudio de las matemáticas es necesario atender tanto a las líneas de contenidos como a los procesos donde los estudiantes tengan oportunidades de examinar casos particulares, formular conjeturas, presentar argumentos y comunicar resultados. Durante estas actividades se destaca el uso de diversas representaciones y recursos matemáticos que les permitan identificar el comportamiento de parámetros relevantes de la situación. En particular, se enfatiza la necesidad de que el maestro diseñe actividades instruccionales donde los estudiantes tengan oportunidad de valorar la importancia de plantear preguntas, utilizar distintos recursos y estrategias que les permitan examinar cualidades matemáticas asociadas al proceso de solución. Así, las actividades en una situación se transforman en un vehículo para promover en los estudiantes la disposición hacia el estudio de la disciplina. Aquí el papel del maestro es fundamental tanto en el monitoreo del trabajo de los estudiantes como en la guía constante sobre los caminos y conexiones a explorar. ¿Qué cualidades o características son propias de una situación para que se transformen en un vehículo de aprendizaje de procesos y contenidos de las matemáticas? Un aspecto importante es que la situación o problema debe poseer una estructura que permita a los estudiantes formular preguntas, usar diversas representaciones, plantear conjeturas, utilizar argumentos y comunicar resultados. Además, una situación puede estar inmersa en múltiples contextos y ofrecer al estudiante la oportunidad de establecer conexiones entre el quehacer de la disciplina y los contextos en que se presenta. En este sentido se pueden distinguir tres tipos de escenarios con características propias de situaciones que pueden servir de marco para incentivar la participación de los estudiantes en actividades esenciales que aparecen en el quehacer de la disciplina:

Contexto puramente matemático. El referente en donde se desarrolla la situación, involucra solamente aspectos matemáticos. Un objetivo puede ser la formulación de un problema o la búsqueda de una solución a una pregunta planteada. Aquí, el principal interés, desde el punto de vista instruccional, es que los estudiantes, haciendo uso de una serie de recursos matemáticos, puedan entender la situación para poder plantear un método o camino de solución. Por ejemplo, ¿cuáles son los números primos que se pueden representar como la suma de los cuadrados de dos enteros? Un paso fundamental es identificar la información relevante y acceder a un conjunto de conceptos que permitan explorar casos particulares y eventualmente presentar un plan de solución. ¿Qué es un número primo (sus propiedades)? ¿Cómo expresar el cuadrado de un número entero?, etc. Estas podrían ser algunas preguntas iniciales que ayuden al estudiante a transformar el problema en una ecuación o tratar de construir una tabla de los primeros números primos para poder hacer un análisis de cuáles son aquellos que son suma de los cuadrados de dos enteros. Nótese que el análisis y discusión de la pregunta planteada se circunscribe al ámbito puramente matemático.

Contexto del mundo real. En esta situación, el entendimiento del problema se relaciona con la identificación de variables de la situación real que puedan ser examinadas a partir de recursos matemáticos. Por ejemplo, *el comportamiento del tráfico en la ciudad de México* es una situación en la cual hay que identificar varios parámetros relevantes (número de vehículos, horas de mayor afluencia, etc). Posteriormente, se recolecta información acerca de la interrelación de esos parámetros y eventualmente se plantea un modelo matemático que pasa a representar tal situación. El tratamiento matemático del modelo permite o ayuda a entender el comportamiento de los parámetros y en cierta medida el de la situación original. Pueden existir distintos modelos para analizar la misma situación y cada uno ofrecer ventajas o desventajas en el entendimiento o tratamiento de la situación. La modelación o matematización de problemas que derivan de situaciones del mundo real, ha sido un reto constante de la comunidad matemática que ha contribuido al desarrollo de la disciplina.

Contexto hipotético. La situación se construye a partir de una serie de suposiciones acerca del comportamiento de las variables o parámetros que explican el desarrollo de la situación. Dicho comportamiento de los parámetros no se basa en datos o información real o de laboratorio. Sin embargo, en el tratamiento matemático de la situación se puede resaltar el uso de diversas representaciones y estrategias que muestran no sólo el potencial de diversos contenidos matemáticos, sino también contrastar diversas cualidades asociadas a las diversas formas de solución. Por ejemplo, la información puede ser representada y analizada en una tabla, una lista ordenada, a partir de una gráfica o en forma algebraica. Desde el punto de vista instruccional, estas situaciones son muy adecuadas y sirven para que el estudiante pueda comparar las ventajas o desventajas que ofrecen los diferentes métodos que se utilizan al representar y resolver un problema. Un aspecto notable en el tratamiento de situaciones hipotéticas es que se pueden regular los recursos matemáticos que los estudiantes usarán para entender y participar en un proceso de solución. El NCTM (2000)[15] propone un conjunto de situaciones hipotéticas en donde el objetivo central es que los estudiantes, en el proceso de solución, empleen no solamente una serie de recursos matemáticos sino también exhiban distintas representaciones y formas de solución.

Una característica común en el tratamiento de las situaciones asociadas a distintos contextos, se manifiesta en la forma de entender la situación, plantear formas de solución y comunicar los resultados. Es decir, no importa si el contexto es puramente matemático, de la vida real o hipotético, el estudiante tiene que acceder a una serie de recursos matemáticos y estrategias que le permitan analizar sistemáticamente el comportamiento de ciertos parámetros. En los tres tipos de contextos, es importante plantear conjeturas, utilizar diferentes representaciones, plantear argumentos, comunicar e interpretar soluciones.

En el marco de referencia planteado antes, presentamos un trabajo que se desarrolla en un contexto hipotético donde se establecen una serie de condiciones iniciales que permiten examinar la situación a partir del uso de recursos matemáticos que se estudian en el nivel medio superior. La situación se transforma en un vehículo para discutir el potencial de tres formas diferentes de presentarla: el uso de una tabla o lista sistemática, la representación gráfica o visual, y la representación algebraica. Cada una de estas representaciones ofrece distintos ángulos para analizar el comportamiento de los parámetros. Por ejemplo, la representación gráfica ayuda visualmente a detectar ciertas regularidades; mientras que la algebraica puede permitir analizar el caso general y extrapolar el comportamiento que se observa en la información de la tabla y la gráfica. Las representaciones numérica y gráfica pueden ser un

15 National Council of Teachers of Mathematics (NCTM)(2000). Pinciples and Standars for School Mathematics: the Council. Reston, VA.

factor importante para alcanzar una representación algebraica que permita abordar casos generales.

El trabajo que se presenta inicia mostrando una situación en la cual un médico receta medicamento (sustancia activa) a un paciente. Se desea determinar la cantidad de sustancia activa en el cuerpo del paciente en diferentes momentos después de haber iniciado el tratamiento; después se formulan y discuten algunas preguntas con la finalidad de orientar la discusión en la situación planteada. Durante la discusión se describen algunas fases importantes que se deben seguir en el proceso de solución de un problema, entre las cuales se destacan:

- entendimiento de la situación o problema
- análisis de la información o datos
- solución de casos particulares
- planteamiento y solución de casos generales
- análisis retrospectivo del proceso de solución.

En la última parte se presenta una *guía de aplicación* que auxilia al maestro en la puesta en práctica con los alumnos, de las actividades que se han desarrollado a lo largo de la discusión del trabajo.

1. Planeación de la actividad

Descripción. Los estudiantes reciben información sobre las características particulares de un tratamiento médico bajo el suministro de medicamento. A partir de esto, deben obtener información que les permita determinar la cantidad de medicamento en diferentes momentos. En este proceso los estudiantes necesitan examinar la información desde diferentes perspectivas.

Antecedentes. Los estudiantes deben disponer de diferentes representaciones de los números racionales (decimal, cociente de enteros); funciones (lineales); pendientes de rectas; representación de datos (gráfica, tabular y algebraica).

Contenidos matemáticos importantes en el proceso de solución. Los contenidos matemáticos requeridos en el proceso de solución, incluyen funciones, relaciones recursivas, pendientes de rectas, números racionales (operaciones) y su representación decimal, proporcionalidad, razón de cambio, procesos de aproximación (límites), progresiones geométricas, escalas y medidas.

Procesos matemáticos. Se debe tener en cuenta el uso de tablas (tratamiento numérico de la información), la representación gráfica o visual de la información, la representación algebraica, el análisis de casos particulares, la búsqueda de patrones y generalizaciones, la visión retrospectiva del proceso de solución, la comunicación oral y escrita de resultados.

Condiciones de aplicación. La actividad se puede realizar individualmente o por equipo (3 a 5 estudiantes) que podrán usar calculadoras o algún programa computacional. El tiempo estimado de la actividad es de tres horas en total, dividido en dos sesiones de hora y media.

2. El problema

> *Cuando un paciente recibe un tratamiento médico bajo el suministro de medicamento, se observa que si la*

dosis es pequeña, es posible que éste no produzca ningún efecto positivo en el paciente. Por otro lado, si al paciente se le suministra una dosis muy grande, los efectos colaterales del medicamento pueden ser peligrosos. Además, para que el medicamento logre el efecto deseado, es importante que cierta cantidad de sustancia activa permanezca en el organismo del paciente durante determinado tiempo.

A continuación se describe la forma en que el organismo de un paciente recibe y asimila medicamento durante un tratamiento médico hipotético.

Descripción del suministro. Un médico examina a un paciente y le receta un tipo de medicamento que le ayude a combatir cierta enfermedad. Por cada suministro, la dosis de sustancia activa del medicamento que le receta es de 16 unidades. El médico le da la siguiente descripción del suministro a su ayudante de laboratorio, con la finalidad de hacer un estudio posterior.

i. Dosis por cada suministro: 16 unidades.

ii. Cuando el paciente recibe un suministro de medicamento, su organismo inicia inmediatamente un proceso para asimilar las 16 unidades, y este proceso termina a los 10 minutos de iniciado. Así, diez minutos después del primer suministro, el cuerpo del paciente habrá asimilado la cantidad total de sustancia activa que le fue suministrada.

iii. En el momento en que el organismo del paciente asimila el total de la sustancia activa que le fue suministrada, se inicia un proceso de eliminación del medicamento.

iv. Cuando la cantidad máxima de medicamento previa a un suministro se ha *reducido a la mitad*, tiene lugar el siguiente, iniciándose un aumento en la cantidad de sustancia activa en el organismo del paciente. Para el medicamento que se está suministrando, el médico indica que esa reducción se logra *cada 4 horas* a partir del suministro. Por ejemplo, el segundo suministro se realizará cuando la cantidad de sustancia activa sea de 8 unidades, lo cual ocurrirá cuando hayan transcurrido cuatro horas después del primer suministro.

v. El paciente recibirá varios suministros durante el tratamiento.

¿Cómo analizar la evolución de la cantidad de medicamento en el cuerpo del paciente a partir del uso de ideas o recursos matemáticos? ¿Qué datos o información pueden ser importantes en el análisis? El ayudante de laboratorio se plantea la tarea de *cuantificar la cantidad de sustancia activa que permanecerá en el cuerpo del paciente en diferentes momentos*.

Una posible forma de abordar la tarea planteada, es formulando algunas preguntas que se relacionen directamente con la tarea a realizar.

- ¿Qué cantidad de medicamento acumula el organismo en cada suministro?
- ¿Qué cantidad de medicamento se acumula en el organismo 10 minutos después de cada suministro?

Antes de intentar dar respuesta a las preguntas planteadas, es conveniente hacer algunos señalamientos sobre la importancia de documentar y describir el proceso de solución de un problema que involucra el uso de diversos recursos y procesos matemáticos.

3. Análisis y discusión de fases importantes durante el proceso de solución

En el proceso de resolver un problema, siempre es posible distinguir fases o etapas que explican las acciones que el sujeto realiza durante la búsqueda e implantación de posibles caminos de solución. Por ejemplo, una primera etapa se vincula con la importancia de entender la situación o problema; específicamente interesa identificar la *información relevante* que ayude a proponer caminos o formas de solución. Otro aspecto, es *el diseño e implantación de una o varias formas de solución***.** En particular, en esta fase se destaca el uso de diferentes estrategias como: *el uso de tablas, el análisis de casos particulares, la búsqueda de patrones, o el análisis sistemático de la información* a partir de diversas representaciones (gráficas o algebraicas). Otra etapa esencial, es la *revisión y análisis global del proceso de solución* y la búsqueda de otras *conexiones con la situación original.*

Las dos preguntas planteadas inicialmente sirven de referencia para señalar y discutir las fases importantes del proceso de solución. En particular, se identifica el potencial de un conjunto de estrategias que aparecen vinculadas a las distintas fases del proceso. Además se sugiere un conjunto de actividades que los estudiantes pueden realizar durante su interacción con la situación.

Entendimiento de la situación o problema. Conviene explicar en forma verbal y escrita, usando sus propias palabras, la información que aparece en el enunciado de la descripción del suministro, en términos de lo que le ocurre a la cantidad de sustancia activa durante un periodo determinado. En esta fase se destaca la identificación de datos y momentos importantes durante el tratamiento. Algunos datos que parecen ser relevantes en el entendimiento de la situación que se está analizando, se enumeran a continuación:

– la dosificación es de 16 unidades en cada suministro

– el tiempo de asimilación de la dosis es de 10 minutos

– el periodo de suministros es de 4 horas

– la cantidad de sustancia activa que se elimina entre un valor máximo y un mínimo es la mitad del valor máximo.

Análisis sistemático de la información mediante diversas representaciones. Existen diferentes maneras de analizar los datos o información relevantes que se incluyen en una situación o problema. Por ejemplo, el *uso de una tabla* puede ayudar a determinar el comportamiento de ciertas relaciones entre los datos a partir de un análisis cuantitativo. Una *representación gráfica* puede ayudar a efectuar un análisis visual del comportamiento de los parámetros importantes de la situación o problema. De la misma manera, una *representación algebraica* puede ser de utilidad para expresar en forma general y concisa la relación existente entre datos e incógnitas.

En la situación que se está abordando, se ilustra el uso de estos tipos de representaciones y sus conexiones para contestar y extender las dos preguntas planteadas inicialmente.

(i) Uso de una tabla. Cuando se analizan datos numéricos, un recurso de utilidad es el uso de tablas en donde se muestren aspectos relevantes de la información.

¿Qué datos deben aparecer en una tabla para hacer un análisis eficiente de la información? La respuesta a esta pregunta dependerá de las condiciones del problema o situación. En nuestro caso, dado que hay varios momentos importantes y la información en cada uno de ellos está relacionada estrechamente, se ha elegido la siguiente tabla; sin embargo, existen otras posibilidades para presentar tal información. ¿Cuáles propondría?

Para determinar las entradas de la tabla usaremos las *reglas de asignación* que determinan la cantidad de sustancia en diferentes momentos. Por ejemplo, la *cantidad de sustancia en el organismo al momento del suministro es la mitad de la cantidad máxima antes de éste*. ¿Cuál es la *regla* que determina la cantidad de sustancia en el organismo 10 minutos después del suministro?

De la tabla 1 se observa la dependencia que hay entre el número de suministros y el número de horas transcurridas, más aún, uno determina al otro y recíprocamente. ¿Cuál es la relación de dependencia?

¿Cuántas horas han transcurrido en el momento del *n*-ésimo suministro?

Describa cómo cambia la cantidad de sustancia activa en el organismo del paciente a partir del análisis de la información incluida en la tabla anterior. ¿Qué se observa respecto a la cantidad de sustancia activa en el cuerpo del paciente conforme recibe suministros de medicamento?

Tabla 1

Suministro No. (cada 4 horas)	**Horas transcurridas al momento del suministro**	**Cantidad de sustancia activa en el organismo en el momento de cada suministro**	**Cantidad de sustancia activa en el organismo, 10 min. después de cada suministro**
1	0	0	16
2	4	8	24
3	8	12	28
4	12	14	30
5	16	15	31
6	20	15.5	31.5
7	24	15.75	31.75
8	28	15.875	31.875
9	32	15.9375	31.9375
10	36	15.96875	31.96875

La información contenida en la tabla ilustra algunos aspectos de cómo varía la cantidad de sustancia activa en el organismo después de que el paciente ha recibido cierto número de suministros. De hecho, nos permite observar una *tendencia* de la cantidad de medicamento en el paciente. Esta *tendencia* puede ser más reveladora, si representamos los datos de la tabla mediante el uso de una gráfica en donde se muestre la cantidad de sustancia al *incrementar* el número de horas, y por lo tanto, el número de suministros.

Entre otras cosas, el uso de una tabla nos permite construir, a partir de la información contenida en ésta, una gráfica que ilustre de manera visual el comportamiento de las cantidades bajo estudio.

(ii) Representación gráfica. Con los datos de la tabla, construya una representación gráfica donde se exhiba el número de horas transcurridas y la correspondiente cantidad de sustancia activa acumulada en el cuerpo del paciente (figura 1).

Describa lo que se observa en la gráfica, en términos del seguimiento del tratamiento. ¿Qué diferencias de la información resaltan entre las representaciones tabular y gráfica?

(iii) Análisis algebraico de la información. En algunos casos, la información que se obtiene de una tabla o gráfica, puede ser suficiente para responder y analizar preguntas importantes de la situación o problema. Sin embargo, es común que los datos de una tabla o la información gráfica, sean el vehículo para introducir en el análisis otros métodos, como el *algebraico*. Por ejemplo, en la tabla y gráfica construidas anteriormente, se han observado ciertas *regularidades* en la forma en que cambia la cantidad de sustancia activa en el organismo del paciente. ¿Cómo describir las regularidades en forma algebraica? Regresemos a la tabla 1 y procedamos a efectuar un análisis de cómo se calculó la cantidad de sustancia en *forma racional*, es decir, como *cociente de enteros.* Esto se ilustra en la tabla 2, la cual se construye con la regla: en el sumi-

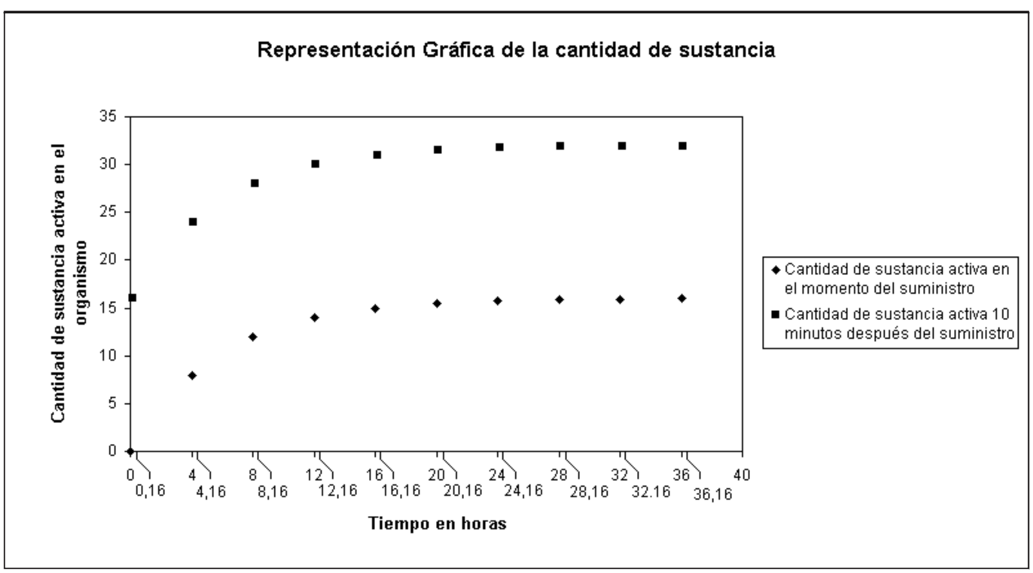


Figura 1

nistro número $n \geq 2$, la cantidad de sustancia es la que había en el suministro número $n - 1$*, más 16, todo dividido entre dos*.

Hagamos algunas observaciones sobre las regularidades de los datos de la tabla. Primeramente, en la tabla 1 notamos que la *cantidad de sustancia* en el organismo, muestra un patrón de comportamiento al aumentar el *número de suministros*. Este patrón lo identificamos como sigue. Notemos que el numerador de la expresión que indica la cantidad de sustancia activa, contiene sumas de la forma

$$16 + 2 \cdot 16 + 2^2 \cdot 16 + \cdots + 2^k \cdot 16,$$

en donde k es un entero positivo. Más precisamente, si C_n denota la cantidad de sustancia activa en el organismo del paciente en el momento del n-ésimo suministro, de la tabla 1 se obtienen las siguientes regularidades:

- aparece 16 como factor en C_n
- cada sumando en el numerador contiene potencias de 2, cuyos exponentes crecen de cero a $n - 2$
- el denominador es 2^{n-1}.

Traduciendo lo anterior a lenguaje algebraico se concluye que:

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{16 + 2 \cdot 16 + 2^2 \cdot 16 + \cdots + 2^{n-2} \cdot 16}{2^{n-1}} \\ &= 16\left(\frac{1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-2}}{2^{n-1}}\right) \end{aligned}$$

Tabla 2

Suministro Número	Cantidad de sustancia activa en el organismo al momento de cada suministro
1	0
2	$\frac{0+16}{2} = \frac{16}{2}$
3	$\frac{\frac{16}{2}+16}{2} = \frac{16+2 \cdot 16}{2^2}$
4	$\frac{\frac{16+2 \cdot 16}{2^2}+16}{2} = \frac{16+2 \cdot 16+2^2 \cdot 16}{2^3}$
5	$\frac{\frac{16+2 \cdot 16+2^2 \cdot 16}{2^3}+16}{2} = \frac{16+2 \cdot 16+2^2 \cdot 16+2^3 \cdot 16}{2^4}$
6	$\frac{\frac{16+2 \cdot 16+2^2 \cdot 16+2^3 \cdot 16}{2^4}+16}{2} = \frac{16+2 \cdot 16+2^2 \cdot 16+2^3 \cdot 16+2^4 \cdot 16}{2^5}$

Note que el referente fundamental para describir el patrón, es el número de suministros: 1, 2,..., n.

La expresión que se tiene para C_n sugiere la pregunta: ¿cómo representar la suma $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-2}$ en forma "cerrada" (fórmula)? Las condiciones del problema imponen la condición $2 \leq n$, (n es el número de suministros), pues para $n = 1$, la cantidad de sustancia se obtiene directamente de los datos. Denotemos por S_{n-2} a la suma anterior y observemos las siguientes características interesantes que relacionan a S_{n-2} y S_{n-1}:

$$\begin{aligned} S_{n-1} &= 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-2} + 2^{n-1} \\ &= S_{n-2} + 2^{n-1} \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} S_{n-1} &= 1 + 2\,(1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-2}) \\ &= 1 + 2S_{n-2}. \end{aligned}$$

De las ecuaciones anteriores obtenemos:

$$S_{n-2} = 2^{n-1} - 1,$$

Lo que a la vez nos permite escribir a C_n en la siguiente forma

$$\begin{aligned} C_n &= 16\left(\frac{1+2+2^2+\cdots+2^{n-2}}{2^{n-1}}\right) \\ &= \frac{16}{2^{n-1}}(2^{n-1}-1) \\ &= 16\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right) \end{aligned}$$

Cambiando 2 por r en la discusión previa, encuentre una expresión para la suma , con n un entero positivo. El caso $r = 1$ debe tratarse aparte.

Se observa que diez minutos después del n-ésimo suministro, el cuerpo del paciente habrá acumulado la cantidad que tenía en ese momento, más la que acaba de ser asimilada (16 unidades). Si esta cantidad la denotamos por A_n se tendrá:

$$A_n = C_n + 16 = 16\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right) + 16 = 16\left(2-\frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

En una parte el proceso de determinación de las fórmulas para A_n y C_n, el estudiante se puede ayudar con una calculadora simbólica, como la TI92. Con este tipo de calculadora se puede proceder de la siguiente manera. Tomando como referencia a la ecuación

$$C_n = 16\,\frac{1+2+2^2+\cdots+2^{n-2}}{2^{n-1}},$$

la tarea inicial sería: ¿cómo introducir esta información en la calculadora de tal manera que se pueda generar la fórmula correspondiente? Una posible forma es la siguiente. Escriba la ecuación anterior en forma de sumatoria haciendo uso de las facilidades que proporciona la calculadora, es decir, usando los comandos correspondientes, escriba la expresión $\left(\frac{16}{2^{n-1}}\right)\left(\sum_{k=0}^{n-2} 2^k\right)$. Una vez hecho esto, se puede invocar el comando `factor` con lo que se obtiene:

$$\left(\frac{16}{2^{n-1}}\right)\left(\sum_{k=0}^{n-2} 2^k\right) = 16(2^n - 2)2^{-n},$$

lo que se puede escribir como $16(1-\frac{1}{2^{n-1}})$, que corresponde exactamente a la fórmula obtenida antes.

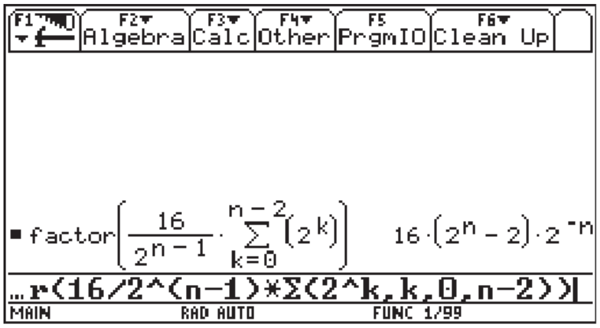


Figura 2
Uso de la calculadora para determinar c_n

Un procedimiento análogo se puede seguir para obtener A_n, esto se ilustra en seguida. Proceda como antes, es decir, utilice el comando `factor` a la expresión: $(16 / 2^{n-1})\left(\sum_{k=0}^{n-2} 2^k\right)+16$, lo que producirá $32(2^n - 1)2^{-n}$ (figura 3). Como antes, este resultado se puede escribir en la forma $16\left(2-\dfrac{1}{2^{n-1}}\right)$ que corresponde al resultado que se obtuvo para A_n.

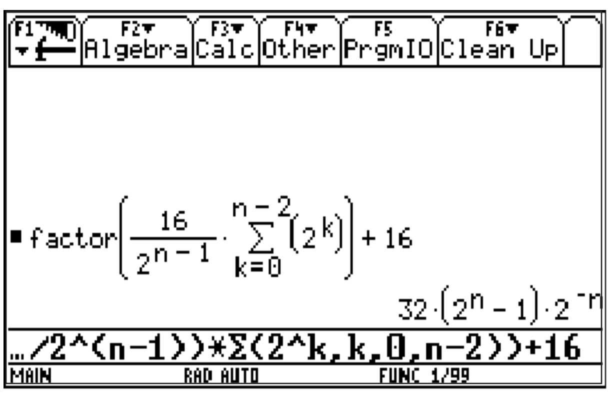


Figura 3
Uso de la calculadora para determinar A_n

El uso de la calculadora simbólica se puede extender para abordar problemas más generales. Arriba se solicita que al cambiar 2 por r se obtenga una expresión que represente a la suma $1 + r + r^2 + \cdots + r^n$, n entero positivo y $r \neq 1$. Para obtener el resultado aplique el comando `factor` a la expresión: $\sum_{k=0}^{n} r^k$ y obtendrá como resultado: $(r^{n+1} - 1)/(r - 1)$ (figura 4).

En los casos tratados antes, la calculadora se puede emplear como un medio que verifique las fórmulas obtenidas por procedimientos algebraicos.

Se observa que el empleo de esta herramienta puede ser de utilidad para que el estudiante conjeture fórmulas o expresiones generales en forma directa.

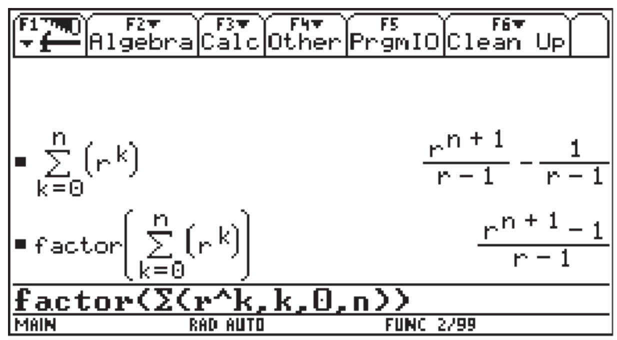


Figura 4
Determinación de $1 + r + r^2 + ... + r^n$

A partir de las expresiones anteriores para A_n y C_n, se pueden verificar los valores en las tablas anteriores como un medio para comprobar que los cálculos efectuados para obtener A_n y C_n son correctos. En la tabla 3 aparecen los valores con expresiones decimales. Verifique estos resultados usando las fórmulas anteriores (use su calculadora). La prueba formal que garantiza la validez de las fórmulas anteriores se puede dar por inducción matemática[16] sobre n.

16 Para una revisión del enunciado y uso del *principio de inducción matemática*, se recomienda consultar el fascículo: "El Método de la Inducción Matemática", I.S. Sominskii, Editorial LIMUSA-WILLEY, S.A. (1972).

Tabla 3

Suministro No. (cada 4 horas)	Horas transcurridas al momento del suministro	C_n	A_n
1	0	0	16
2	4	8	24
3	8	12	28
4	12	14	30
5	16	15	31
6	20	15.5	31.5
7	24	15.75	31.75
8	28	15.875	31.875
9	32	15.9375	31.9375
10	36	15.96875	31.96875

Los resultados anteriores se han obtenido suponiendo que los suministros son dados cada 4 horas. ¿En qué forma cambian éstos, si los suministros se dan cada 8 horas? ¿En qué forma, si los suministros son dados cada 12 horas?

(iv) Variación continua de cantidades. Cuando se abordan problemas que involucran a diferentes tipos de números, por ejemplo: enteros, racionales y reales, una primera aproximación en la búsqueda de soluciones es considerar números enteros, y a partir de los resultados obtenidos para este caso, continuar con un análisis que incluya a los números reales para tener una visión más completa del problema. Por ejemplo, en la discusión que se ha hecho antes respecto a la cantidad de sustancia activa en el cuerpo del paciente, se ha tomado como referente el número de suministros, el cual es un entero. Sin embargo, el número de suministros está determinado por el tiempo transcurrido a partir del momento en que se inicia el tratamiento. Por esto, bajo *hipótesis adicionales* sobre el suministro, se puede hacer una análisis de la cantidad de sustancia en el organismo para cada tiempo t. Para ilustrar estas ideas, haremos la siguiente suposición. Una posibilidad, la cual simplifica el análisis significativamente, es que la *rapidez de asimilación sea constante*. De la misma manera, supongamos que el organismo elimina a una rapidez constante. Con estas suposiciones se pueden plantear las siguientes preguntas.

¿Cuál es la razón de cambio entre valores máximos y mínimos al considerar dos suministros consecutivos?

¿Cómo determinar la cantidad de sustancia activa en cada instante después de iniciado el tratamiento?

Con las condiciones que se han establecido, se puede obtener una expresión que determine la cantidad de sustancia activa en cada instante. Para esto procederemos de la siguiente forma.

La hipótesis sobre la forma en que asimila la sustancia el organismo, equivale a decir que la cantidad de sustancia entre un valor máximo y un mínimo *varía linealmente* respecto al tiempo, entonces, para determinar la cantidad de sustancia en cada momento, es suficiente (¿por qué?) encontrar las pendientes de los segmentos que unen los puntos (n, C_n) y $(n + 1/24, C_n + 16)$; $(n + 1/24, C_n + 16)$ y $(n + 1, C_{n+1})$ (figura 5).

Aquí se ha tomado como unidad de medida el tiempo que transcurre entre dos suministros consecutivos, entonces 10 minutos es 1/24 de esta unidad (¿por qué?).

Notemos que la rapidez de eliminación es precisamente la pendiente del segmento definido por los puntos $(n + 1/24, C_n + 16)$ y $(n + 1, C_{n+1})$. Si ésta es denotada por E_n, entonces se tiene:

$$E_n = \frac{C_{n+1} - C_n - 16}{n + 1 - n - \frac{1}{24}} = \frac{24}{23}\left\{16\left(1 - \frac{1}{2n}\right) - 16\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) - 16\right\}$$

$$= \frac{384}{23}\left\{\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^n} - 1\right\}$$

$$= \frac{384}{23}\left(\frac{1}{2^n} - 1\right) \quad \text{(¿por qué?)}$$

Para analizar el proceso de asimilación, bajo la hipótesis de su rapidez constante, debemos tomar un valor mínimo, (C_n) y el inmediato valor máximo, $(A_n = C_n + 16)$. Si la rapidez de asimilación es denotada por D_n, se tiene:

$$D_n = \frac{C_n + 16 - C_n}{n + 1/24 - n} = \frac{16}{1/24} = 384.$$

¿Cuál es el significado del valor $D_n = 384$ en términos de la cantidad de sustancia asimi-

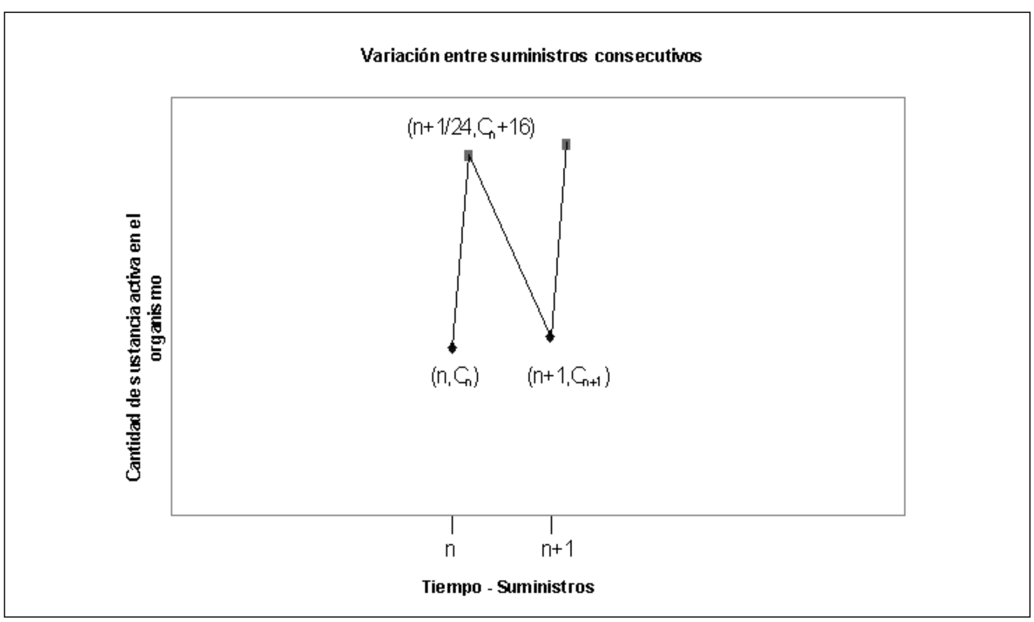


Figura 5

lada por unidad de tiempo? ¿Está de acuerdo este resultado con los datos iniciales?

La figura 6 ilustra la cantidad de sustancia en cada instante partiendo de los supuestos anteriores, (rapidez de asimilación y eliminación constante). Esta gráfica puede ser útil para responder las preguntas que se plantean. ¿Puede obtener una *función* que describa la cantidad de sustancia en el organismo del paciente en cada instante? ¿Cuáles son los significados de las expresiones para E_n y D_n en términos de la *variación* de sustancia activa en el organismo del paciente? Explique.

En el suministro de algún medicamento, se espera que el organismo mantenga una cantidad mínima, para que surta efecto, y una máxima para evitar sobredosis. Identifique en la gráfica anterior, a partir de qué suministro se consideran *estabilizadas* tanto la cantidad máxima como mínima. ¿Cuáles son esos valores? Explique.

El proceso de absorción y eliminación de sustancias médicas depende del organismo de cada persona. En la situación que se ha estado discutiendo, diremos que el paciente tiene un *factor de eliminación* de 1/2, lo cual significa que al momento de un suministro, el organismo ha *eliminado la mitad* de la cantidad máxima que alcanzó 10 minutos después del suministro previo. ¿Cuál es el comportamiento de las cantidades en un proceso similar al anterior para un paciente que tiene un factor de eliminación de 1/3? ¿Cuál es para un paciente que tiene un factor de eliminación 1/4?

Llamemos *período de absorción* al tiempo que tarda el cuerpo del paciente en asimilar la totalidad del medicamento después de haberlo recibido. Por ejemplo, en el

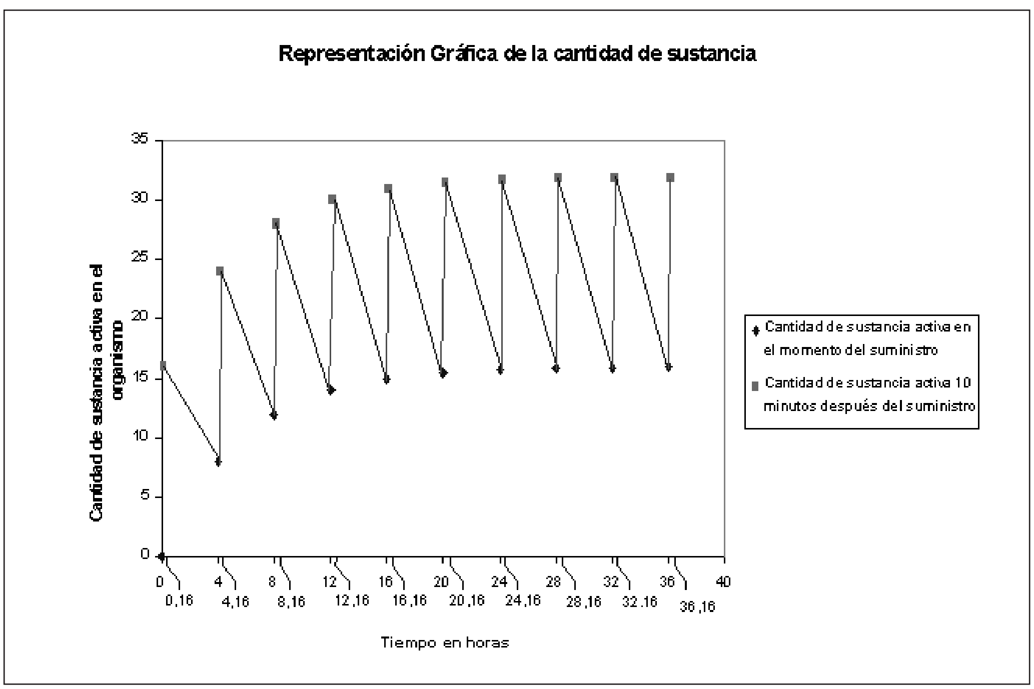


Figura 6

caso discutido antes, el período de absorción es 10 minutos. Si $t \neq 10$ minutos es un tiempo fijo mayor que cero y menor que 4 horas, ¿Cambian todos los resultados anteriores?

Tratamiento del caso general. En general, al poner en práctica un tratamiento bajo el suministro de medicamento, se deben considerar ciertas características físicas del paciente (edad, peso, etc.), las cuales ayudarán a determinar la dosis correspondiente.

Supongamos que se desea hacer un estudio en el cual se tratarán pacientes suministrándoles un medicamento que exhibe un patrón similar al discutido antes. Lo que se debe tener como datos son:

- la cantidad d de sustancia a ser suministrada cada vez
- el factor r de eliminación
- el período t de absorción
- el tiempo s entre cada suministro.

En el tratamiento discutido antes, $d = 16$ unidades, $r = 1/2$, $t = 10$ minutos y $s = 4$ hrs. Si en cada suministro el paciente recibe d unidades, el factor de eliminación es r, el tiempo de absorción es t, y el cuadro de comportamiento es como el que ha sido discutido antes, entonces al término de t unidades de tiempo, por ejemplo minutos, después del primer suministro, el paciente registra en su organismo d unidades, de las cuales, al momento del segundo suministro, tendrá $d - rd$, cantidad igual a la que tenía, menos la que eliminó. Al término de t minutos después del segundo suministro, tendrá $d - rd + d = d(2 - r)$ unidades. El análisis para suministros sucesivos lo podemos ilustrar de la siguiente forma. Si C_n denota la cantidad de sustancia activa en el cuerpo del paciente al momento del n-ésimo suministro ($n \geq 2$), t minutos después, la cantidad se habrá incrementado a $C_n + d$. Denotemos esta nueva cantidad por A_n. Entonces la relación entre C_n y A_{n-1}, de acuerdo a las condiciones del suministro, es: C_n es igual a A_{n-1}, menos la cantidad que fue eliminada, la cual es rA_{n-1}, en forma algebraica,

$$C_n = A_{n-1} - rA_{n-1} = A_{n-1}(1 - r)$$

También se tiene que A_{n-1} es la cantidad que había al momento del $(n - 1)$-ésimo suministro más d, es decir, sustituyendo la última ecuación en la penúltima, agrupando y factorizando se tiene:

$$C_n = (C_{n-1} + d)(1 - r),$$

es decir, podemos obtener C_n conociendo C_{n-1}. ¿Cuál es la relación que hay entre A_n y A_{n-1}? Con las expresiones anteriores para C_n, podemos obtener algunas de las entradas de la siguiente tabla, ¿Cómo llenar las restantes? En lo que sigue, n denota el número de suministro.

En la tabla 4 se observa un patrón de comportamiento en la expresión que determina a C_n. Al momento del suministro n-ésimo, C_n está expresada como suma de potencias de $1 - r$, corriendo los exponentes desde 1 hasta $n - 1$ y d aparece como factor común. Esto se puede representar en forma algebraica como se indica abajo.

$$C_n = d[(1 - r) + (1 - r)^2 + (1 - r)^3 + \cdots + (1 - r)^{n-1}]$$

Podemos utilizar la ecuación anterior para obtener una expresión para A_n, recordando que $A_n = C_n + d$, de lo que se tiene:

$$\begin{aligned} A_n &= C_n + d \\ &= d[(1 - r) + (1 - r)^2 + (1 - r)^3 \\ &\quad + \cdots + (1 - r)^{n-1}] + d \end{aligned}$$

Tabla 4

N	C_n	A_n
1	0	d
2	$d(1 - r)$	?
3	$[d(1 - r) + d][1 - r]$ $= d[(1 - r)^2 + (1 - r)]$	?
4	$\{d[(1 - r)^2 + (1 - r)] + d\}\{1 - r\}$ $= d[(1 - r)^3 + (1 - r)^2 + (1 - r)]$	?
5	$\{d[(1 - r)^3 + (1 - r)^2 + (1 - r)] + d\}\{1 - r\}$ $= d[(1 - r)^4 + (1 - r)^3 + (1 - r)^2 + (1 - r)]$	?

$$= d[1 + (1 - r) + (1 - r)^2 + (1 - r)^3 + \cdots + (1 - r)^{n-1}]$$

Se observa que la expresión que representa a C_n contiene sumas de la forma $B + B^2 + \cdots + B^k$, la cual al sumarle uno, es similar a las consideradas antes, para el caso $B = 2$. Denotemos por S_k a la suma $1 + B + B^2 + \cdots + B^k$. La relación entre S_k y S_{k-1} es similar al caso $B = 2$, tratado antes, es decir,

$$\begin{aligned} S_k &= 1 + B + B^2 + \ldots + B^k \\ &= 1 + BS_{k-1} \\ &= S_{k-1} + B^k \end{aligned}$$

De esto obtenemos: $(B - 1)S_{k-1} = B^{k-1}$. Si $B = 1$, la suma que define a S_{k-1} contiene k sumandos todos iguales a 1, por lo que $S_{k-1} = k$. En cualquier otro caso se tiene,

$$S_{k-1} = \frac{B^k - 1}{B - 1}.$$

Con este resultado obtenga una fórmula para la suma $B + B^2 + \cdots + B^k$ y verifique que las expresiones que determinan a C_n y A_n están dadas por:

$$C_n = d\left[\frac{1 - r - (1 - r)^n}{r}\right],$$

$$A_n = d\left[\frac{1 - (1 - r)^n}{r}\right],$$

cuando $r \neq 0$.

Es interesante notar que el uso de una calculadora simbólica puede ser de gran utilidad, aún en el caso en que se aborden problemas completamente algebraicos. Por ejemplo, usando la calculadora TI-92, podemos obtener las fórmulas anteriores; para ésto procedemos como sigue:

Para obtener A_n aplique el comando `factor` a la expresión: $d\left(\sum_{k=0}^{n-1}(1-r)^k\right)$, lo cual produce $d\left[\frac{1}{r} - \frac{(-(r-1))^n}{r}\right]$, que es una expresión equivalente a la que aparece arriba (figura 7).

Un procedimiento similar se aplica para obtener C_n , salvo que ahora la sumatoria que

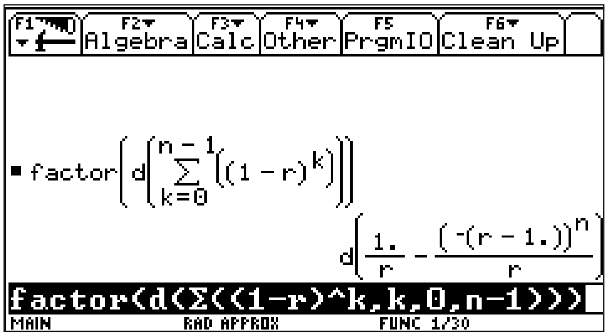


Figura 7
Uso de la calculadora para determinar A_n

define a C_n inicia en uno. ¿Cómo procederá para obtenerlo?

Con el uso de la calculadora se puede abordar parte de la siguiente pregunta ¿Qué ocurre cuando r toma los valores 0, 1/2, 1? Interprete estos resultados.

En la discusión anterior se tomó como dato importante el factor de eliminación del organismo. ¿Qué formulación se tiene para un tratamiento en el que se conoce el factor de retención? Es decir, si conocemos que la cantidad de medicamento que tiene el cuerpo del paciente al momento de un suministro, es r veces la cantidad máxima alcanzada t minutos después del suministro previo?, ¿qué formulación se tiene para este caso?

Visión retrospectiva del proceso de solución. El proceso de solución del problema ofrece oportunidades para que los estudiantes:

a) obtengan información numérica y la organicen de manera sistemática

b) se percaten de la utilidad que tiene el usar diferentes representaciones de la información disponible, en particular resalta la importancia de sistematizar la información mediante el uso de una lista ordenada de los datos, es decir, por medio de una tabla, lo que a la vez permite la construcción de una gráfica a partir de los datos

c) comparen la consistencia entre los resultados obtenidos directamente de las condiciones del problema con los que se obtienen de fórmulas obtenidas en la discusión

d) valoren la importancia de abordar casos particulares en el proceso de solución de un problema

e) generalicen a partir del estudio de casos particulares. Esto les muestra la necesidad de usar símbolos y términos para abordar situaciones generales.

4. Guía de aplicación para el estudiante

Nombre del estudiante:
Nivel:
Escuela:
Dependencia
Fecha:

Instrucciones. Lea cuidadosamente la descripción y explicación que un médico le proporciona a su *ayudante de laboratorio* cuando se prescribe medicamento. Conteste las preguntas que se indican mostrando todas las ideas y recursos matemáticos que emplee en el proceso de solución.

Descripción del suministro. Un médico examina a un paciente y le receta un tipo de medicamento que le ayude a combatir cierta enfermedad. Por cada suministro, la dosis de sustancia activa del medicamento que le receta es de 16 unidades. El médico le da la siguiente descripción del suministro a su *ayudante de laboratorio* con la finalidad de hacer un estudio posterior.

a) Dosis por cada suministro son de 16 unidades.

b) Cuando el paciente recibe un suministro de medicamento, su organismo inicia inmediatamente un proceso para asimilar las **16 unidades**, y este proceso termina a los 10 minutos de iniciado. Así, diez minutos después del primer suministro, el cuerpo del paciente habrá asimilado la cantidad total de sustancia activa que le fue suministrada.

c) Al momento que el organismo del paciente asimila el total de la sustancia activa que le fue suministrada, se inicia un proceso de eliminación del medicamento.

d) Cuando la cantidad máxima de medicamento previa a un suministro se ha **reducido a la mitad**, tiene lugar el siguiente, iniciándose un aumento en la cantidad de sustancia activa en el organismo del paciente. Para el medicamento que se está suministrando, el médico indica que esa reducción se logra **cada 4 horas** a partir de suministro. Por ejemplo, el segundo suministro se realizará cuando la cantidad de sustancia activa sea de 8 unidades, lo cual ocurrirá cuando hayan transcurrido cuatro horas después del primer suministro.

e) El paciente recibirá varios suministros durante el tratamiento.

A partir de esta descripción del suministro, responda las siguientes preguntas relacionadas con la cantidad de sustancia activa que permanecerá en el cuerpo del paciente en diferentes momentos:

Comprensión de la situación o problema. Explique en forma verbal y con sus propias palabras la descripción del suministro.

- ¿Qué cantidad de sustancia recibe el paciente en cada suministro?
- ¿Cuánto tiempo transcurre en asimilar la primera dosis?
- ¿En cuánto se ha reducido la cantidad de sustancia al momento del segundo suministro?

Diseño y puesta en práctica de un plan

a) ¿Qué cantidad de medicamento ha retenido el organismo del paciente al momento de cada suministro? En una tabla, describa la cantidad de sustancia activa que permanece en el cuerpo del paciente en el momento que se realiza el suministro, durante las primeras treinta y seis horas.

b) ¿Qué cantidad de medicamento se acumula en el organismo 10 minutos después de cada suministro? En una tabla describa la cantidad de medicamento que acumula el organismo del paciente 10 minutos después de cada suministro durante las primeras treinta y seis horas.

c) A partir de la información incluida en las tablas anteriores, represente en una gráfica la cantidad de sustancia activa que retiene el paciente en el momento de cada suministro (cada 4 horas) y diez minutos después de éste.

d) Describa lo que se observa en la gráfica, en términos del seguimiento del tratamiento. ¿Qué diferencias resaltan entre las representaciones tabular y gráfica de la información referente al tratamiento?

e) En una tabla, describa la cantidad de sustancia activa en el organismo del paciente para los primeros 7 suministros. El resultado expréselo como se indica en los siguientes ejemplos. La cantidad de sustancia activa en el tercer y cuarto suministro se puede repre-

sentar como
(8 + 16)/2 y [(8 + 16)/2 + 16]/2 = (8 + 16 + 2 · 16)/2, respectivamente (explique). ¿Existe alguna regularidad o patrón en la cantidad de sustancia activa para cada suministro? ¿Cómo se puede expresar la cantidad de sustancia activa para cada suministro? ¿Cómo se puede expresar la cantidad de sustancia activa almacenada por el organismo del paciente en el *n*-ésimo suministro?

f) Determine la expresión que ayude a calcular la cantidad de sustancia activa 10 minutos después del *n*-ésimo suministro.

g) Se observa (figura 8) que en dos suministros consecutivos, n y $(n + 1)$ existe un momento (10 minutos después del primer suministro) donde la cantidad del primer suministro C_n se incrementa en 16 unidades. Si se unen con rectas los puntos (n, C_n), $(n + 1/24, C_n + 16)$ y $(n + 1, C_{n+1})$ calcule las pendiente de estas dos rectas. ¿Qué significa el valor de las pendientes en relación al tratamiento?

h) En las condiciones del tratamiento se observa que el paciente tiene un factor de eliminación de 1/2, lo cual significa que al momento de un suministro, el organismo ha eliminado la mitad de la cantidad máxima que alcanzó 10 minutos después del suministro previo. ¿Cuál es el comportamiento en un proceso similar al anterior para un paciente que tiene un factor de eliminación de 1/3? ¿Cuál es el comportamiento en un proceso similar al anterior para un paciente con factor de eliminación de 1/4?

I) Caso General. Si ahora en cada suministro el paciente recibe *d* unidades de sustancia activa, el factor de eliminación es *r* y se mantiene el cuadro de comportamiento anterior, entonces la siguiente tabla describe los primeros tres suministros y lo que ocurre en cuanto a la cantidad de sustancia activa en el cuerpo del paciente al momento del suministro y diez minutos después de éste.

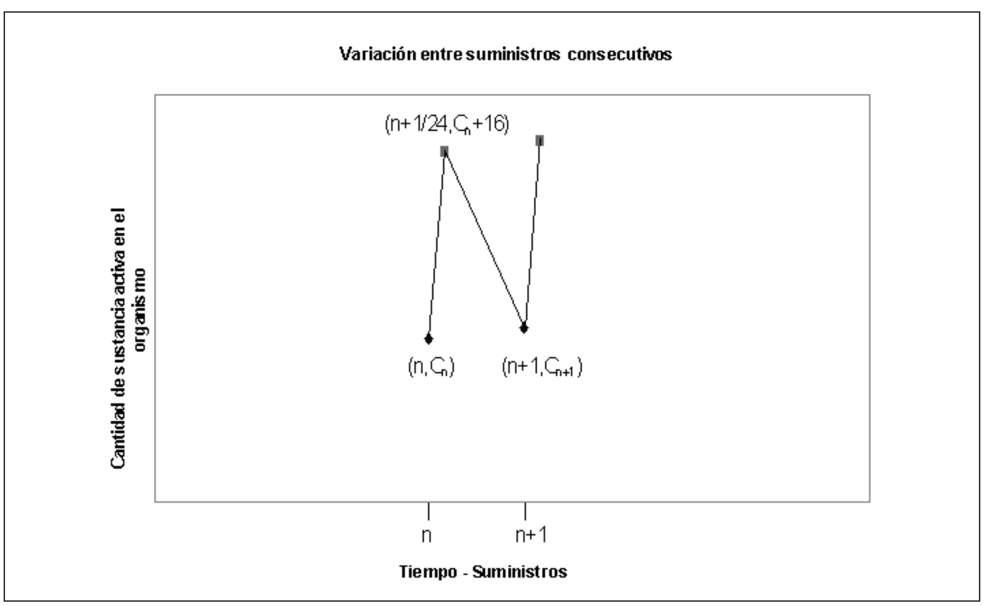


Figura 8

Complete la tabla 5 para los suministros Nos. 4, 5 y 6. Encuentre una expresión general que describa lo que ocurre en el *n*-ésimo suministro.

Tabla 5

Suministro No.	Cantidad de sustancia activa en el cuerpo al momento del suministro	Cantidad de sustancia activa en el cuerpo 10 minutos después del suministro
1	0	d
2	$d + rd = d(1 - r)$	$d\,(1 - r) + d = d\,[(1 - r) + 1]$
3	$d[(1 - r) + 1] - rd\,[(1 - r) + 1]$ $= \; d\,[(1 - r) + 1]\,[1 - r]$ $= \; d\,[(1 - r)^2 + (1 - r)]$	$d\,[(1 - r)^2 + (1 - r)] + d$ $= \; d\,[(1 - r)^2 + (1 - r) + 1]$
4		
5		
6		

Un problema de variación

Luz Manuel Santos Trigo
CINVESTAV – IPN, México

En el sistema cartesiano graficar la función $y = -2x + 8$. Dibujar un rectángulo en el primer cuadrante de tal manera que uno de sus vértices sea el origen del sistema coordenado, otro vértice se encuentre sobre la gráfica de $y = -2x + 8$ y el segmento que une este vértice con el origen sea una diagonal del rectángulo. ¿Dónde se ubicarán los otros dos vértices?

Indagación

1. ¿Qué parámetros hay que atender para graficar la función $y = -2x + 8$? Dos caminos pueden plantearse en esta dirección:

– enfocar la atención sobre algunos puntos cuyas coordenadas satisfagan la expresión

– identificar los parámetros fundamentales, pendiente y ordenada al origen, para graficar la ecuación. ¿Cómo se obtiene la pendiente de una recta? ¿Qué información de la recta proporciona el valor de la pendiente? ¿Qué relación existe entre el valor de la pendiente y el ángulo de inclinación de la recta?

Entre los aspectos importantes que se generan en el tratamiento de la situación inicial se destacan:

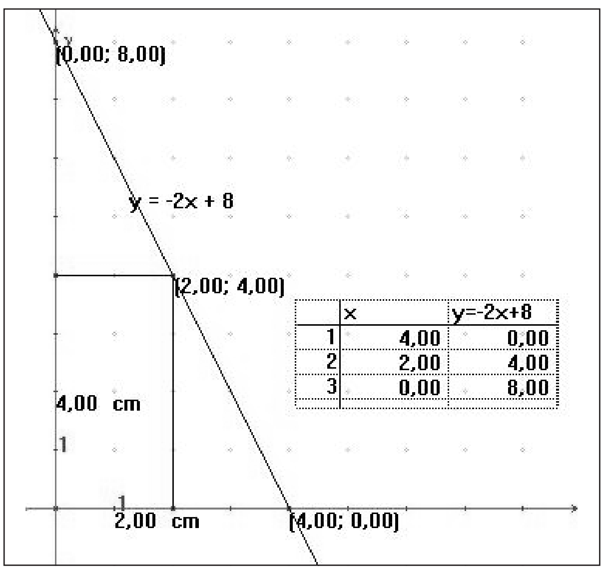
- El conocimiento del plano cartesiano en relación a cómo graficar puntos y lo que significa que las coordenadas de un conjunto de puntos satisfagan la ecuación de la recta. Es decir, un punto $P(x,y)$ pertenece a la gráfica de $y = f(x)$ si y solamente si el par (x,y) satisface la ecuación $y = f(x)$. Esta información es importante para ubicar uno de los vértices del rectángulo (el que está sobre la recta).
- El conocimiento geométrico de la línea recta. Aquí es importante entender conceptos como punto, ángulo, línea paralela y hechos como el que dos puntos determinan una recta.
- El conocimiento de que un punto sobre la recta y la dirección de ésta,4 son condiciones suficientes para determinarla.
- El conocimiento del significado geométrico de los parámetros m y b en la ecuación de la recta $y = mx + b$. Por ejemplo, b en la ecuación significa que la gráfica de $y = mx + b$ corta al eje y en el punto $(0,b)$.
- El pensar simultáneamente la gráfica de la ecuación $y = mx + b$ como una colección de puntos y como una entidad. Aquí conviene reflexionar sobre los efectos que se producen en la representación gráfica al

efectuar cambios en los valores de *m* y *b*. Por ejemplo, ¿qué le ocurre a la recta si el valor de *b* aumenta?, ¿qué le pasa a la recta cuando *b* es negativo?

Las siguientes actividades y preguntas se relacionan con los aspectos mencionados.

a) Proponga distintos valores para *m* y *b* en la expresión $y = mx + b$, construya la gráfica para cada caso y reporte lo que observa a partir de los efectos que estos valores producen en las gráficas correspondientes.

b) ¿Qué puntos se deben seleccionar para dar una indicación precisa del comportamiento de la gráfica?, ¿qué ocurre si se mantiene un valor fijo de un parámetro (pendiente u ordenada al origen) y el otro varía?



	x	y=-2x+8
1	4,00	0,00
2	2,00	4,00
3	0,00	8,00

Figura 1

c) ¿Se puede encontrar un punto sobre la recta si se sabe el valor de su primera coordenada? Por ejemplo, ¿cuál sería el valor de la segunda coordenada de los puntos P_1(3, ?) y P_2(5, ?) para que se encuentren sobre la recta? ¿Están estos puntos en el primer cuadrante? ¡Explique!

d) ¿Qué valores puede tomar la primera coordenada si se quiere que el punto $P(x, y)$ sobre la recta aparezca en el primer cuadrante?

e) ¿Cómo se determinan las coordenadas de un punto sobre la recta? ¿Qué información proveen las coordenadas de un punto $P(x, y)$?

2. Después de haber representado la línea recta de ecuación $y = - 2x + 8$, el siguiente paso es dibujar un rectángulo que satisfaga las condiciones que se indican. Una pregunta aquí es: ¿existe suficiente información para dibujarlo? Para responder, es importante ubicar el rectángulo en términos de sus propiedades (dos pares de lados paralelos, cuatro ángulos rectos, dos pares de lados congruentes) y verificar que éstas se cumplen en la figura.

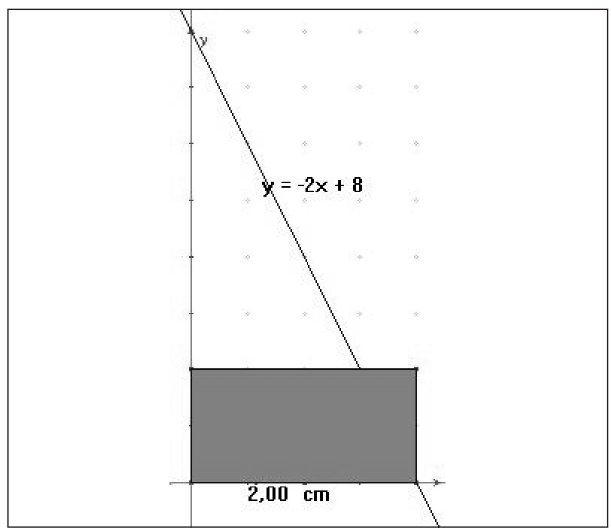


Figura 2

a. ¿Cuál es la información importante que se debe considerar en la construcción del rectángulo?

   Este debe ubicarse en el primer cuadrante, uno de sus vértices debe ser el origen, el vértice opuesto al origen sobre la diagonal debe ubicarse sobre la línea recta.

b. ¿Por qué el rectángulo de la figura 2 no cumple con todas las condiciones que se piden?

Se observa que la condición que no cumple es que el vértice superior derecho no se encuentra sobre la gráfica de $y = -2x + 8$

La figura 3 muestra un rectángulo que cumple todas las condiciones requeridas (el estudiante debe verificar que la figura satisface todas las condiciones)

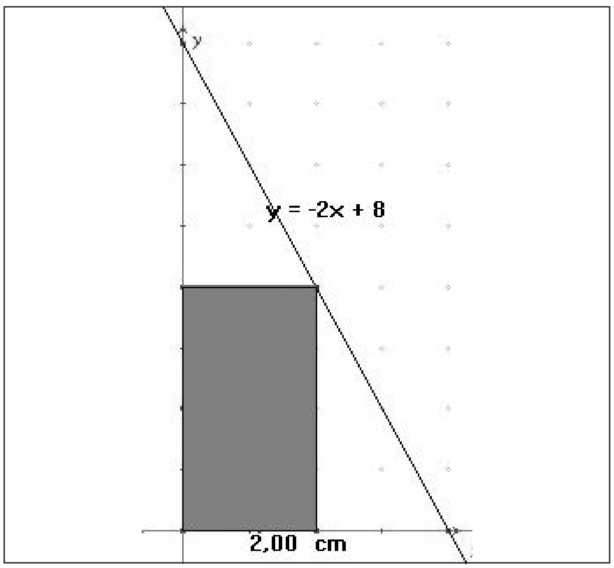


Figura 3

c) ¿Se puede dibujar otro rectángulo que cumpla las condiciones iniciales? ¿Cuántos rectángulos más se pueden dibujar con las condiciones establecidas?

Una idea matemática importante que puede comenzar a explotarse es la idea de variación. Por ejemplo, se ha observado que es posible construir varios rectángulos que cumplan las condiciones iniciales. Atributos como el perímetro y el área pueden utilizarse como referencia para comparar las cualidades de algunos rectángulos dibujados.

En la figura 4 se observa que los rectángulos OASH, OBRG, OCQF y ODPE cumplen las condiciones requeridas (explicar).

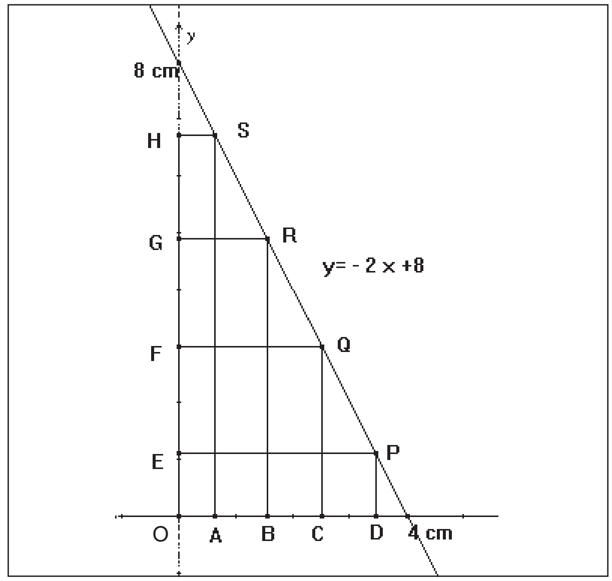


Figura 4

3. Dibuje cuatro rectángulos que satisfagan las condiciones iniciales y calcule las áreas y perímetros correspondientes. Explique cómo determinar la información necesaria para realizar los cálculos. Haga una tabla en donde muestre la longitud de los lados de cada rectángulo, sus áreas y perímetros correspondientes. Incluya en la tabla el caso donde el valor del lado que está sobre el eje x tenga longitud x.

Al llenar la tabla se utiliza la relación que existe entre los puntos que están sobre el segmento de la recta y las dimensiones del rectángulo (¿cómo se obtiene la altura en cada rectángulo?)

4. Dibuje las gráficas asociadas al perímetro $P(x) = -2x + 16$ y al área $Q(x) = 2x^2 + 8x$.

5. Describa el comportamiento de las gráficas en términos de los lados del rectángulo y

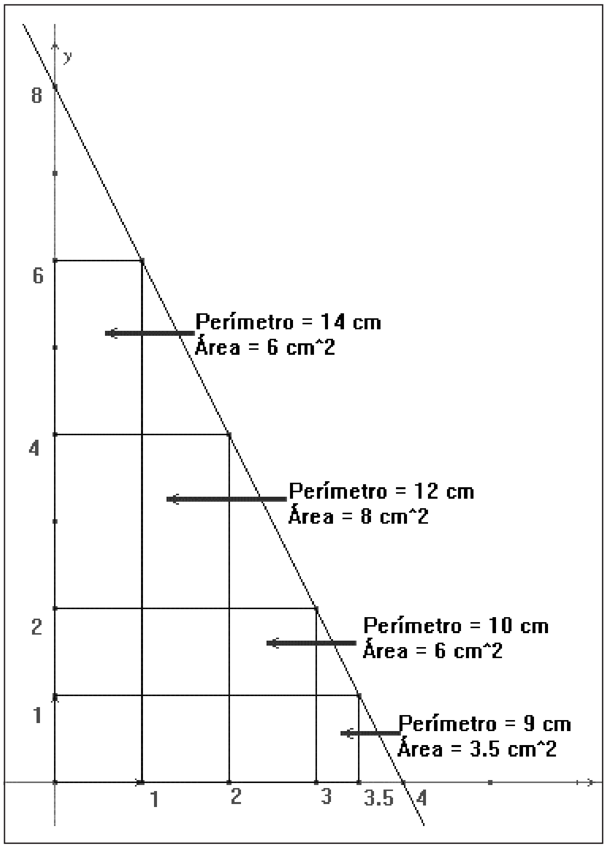


Figura 5

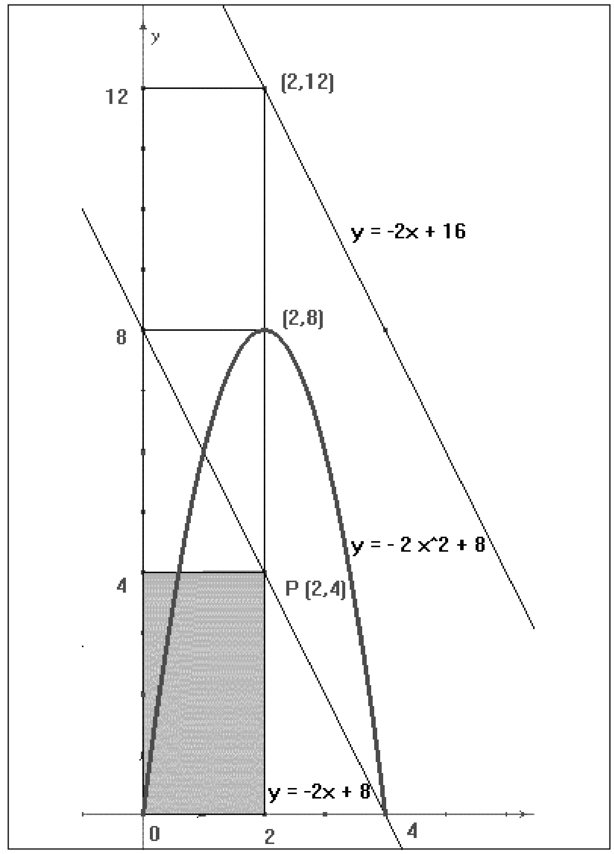


Figura 6

Base	Altura	Perímetro	Área
1 cm	6 cm	14 cm	6 cm^2
2 cm	4 cm	12 cm	8 cm^2
3 cm	2 cm	10 cm	6 cm^2
3.5 cm	1 cm	9 cm	3.5 cm^2
x cm	$-2x + 8$	$2(x - 2x + 8)$ cm $= -2x + 16$ cm	$x(-2x + 8) =$ $-2x^2+8x$ cm^2

su correspondiente perímetro y área. Por ejemplo, si el lado que va del origen *O*, al punto *A* es 2, entonces el otro lado correspondiente del rectángulo OAPB será 4. Para este rectángulo el área será 8 cm^2 y su correspondiente perímetro 12 cm. En las gráficas, estos puntos son (2,4) y (2,12).

A partir de la figura 6, conteste las siguientes preguntas:

a) ¿Existe un rectángulo que tenga un área de 9 cm^2 ? Explique.

b) ¿Existe un rectángulo que tenga un perímetro de 9 cm? Explique.

c) Al observar la gráfica del área, se nota que para algunos valores del área se pueden encontrar dos rectángulos que tengan ese valor. Proporcione tres ejemplos de pares de rectángulos que tengan una misma área. ¿Ocurrirá lo mismo para el caso del perímetro? Es decir, ¿habrá dos rectángulos que tengan un mismo perímetro?

En la figura 7, el rectángulo *OABC* con lados 1 cm y 6 cm, y el rectángulo *ODEF* con lados 3

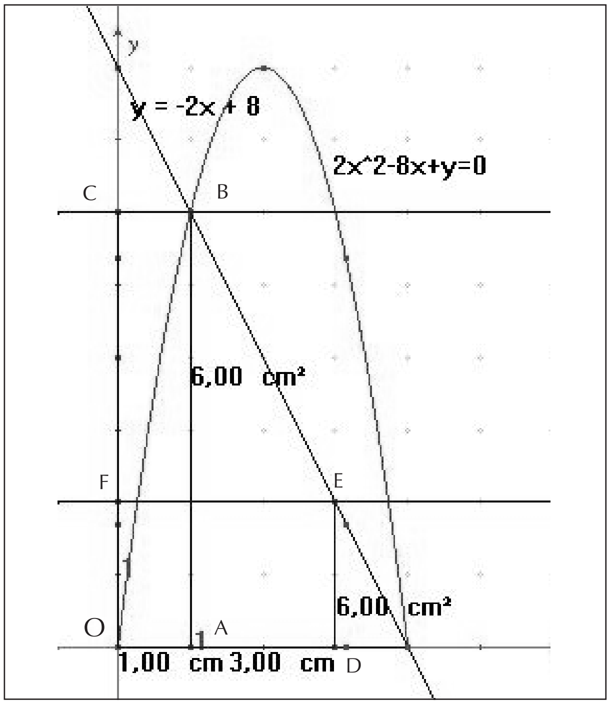
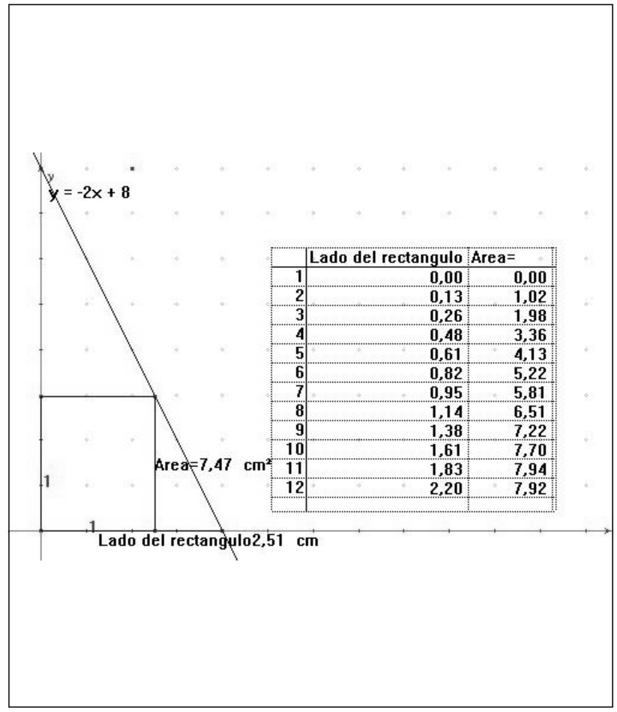


Figura 7



	Lado del rectangulo	Area=
1	0,00	0,00
2	0,13	1,02
3	0,26	1,98
4	0,48	3,36
5	0,61	4,13
6	0,82	5,22
7	0,95	5,81
8	1,14	6,51
9	1,38	7,22
10	1,61	7,70
11	1,83	7,94
12	2,20	7,92

Figura 8

cm y 2 cm, tienen la misma área igual a 6 cm^2.

d) ¿En cuántos puntos una línea paralela al eje de las abscisas, que pase por algún valor del área corta a la gráfica del área? Explicar.

e) Haga una tabla donde se muestre el valor del área de varios rectángulos y sus dimensiones. Describa lo que observa respecto al comportamiento del área.

f) ¿Existe un valor del área en donde solamente exista un rectángulo con ese valor? ¿Puede calcular el valor del área y las dimensiones de ese rectángulo?

7. Compare el comportamiento de la gráfica del área (parábola) con los valores de la tabla en la figura 8.

a) ¿Qué conexión tiene el vértice de la parábola con los valores de la tabla?

b) Escriba lo que observa en términos de las dimensiones del rectángulo con el valor del área.

Conclusiones

La tarea planteada inicialmente fue la de representar en el plano cartesiano una línea recta y un rectángulo con ciertas condiciones. Después hubo oportunidad de analizar el comportamiento de atributos como el perímetro y el área de rectángulos a partir del enfoque y la cuantificación de algunos aspectos de variación. Se destaca la relación entre la situación inicial, la representación analítica de los atributos y sus respectivas gráficas. Para esta situación inicial se observó que tanto el perímetro como el área dependían de las dimensiones que se le asignaban a los lados del rectángulo; en particular, para el área, había casos en que para un valor determinado se podían encontrar dos rectángulos con ese mismo valor.

Los ingredientes importantes de la situación inicial incluían una línea recta, un rectángulo en el primer cuadrante, etc. Una pregunta importante aquí es:

¿Qué le pasaría al perímetro y al área del rectángulo si ahora en lugar de tener uno de sus vértices sobre la recta con ecuación $y = -2x + 8$, lo tiene sobre la gráfica de $y = 2/x$?

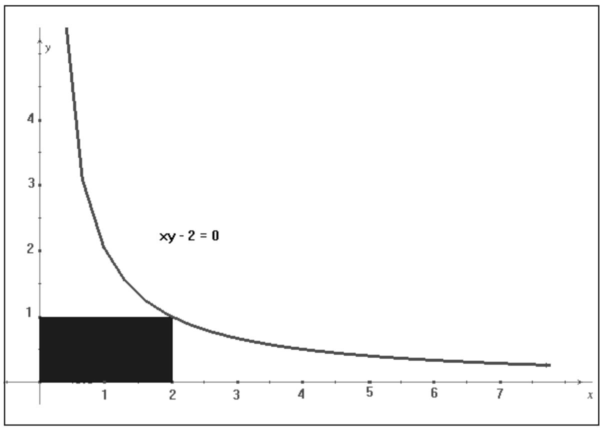


Figura 9

Antes de abordar formalmente el problema sería importante que los estudiantes plantearan y explicaran sus conjeturas.

Una forma de investigar el comportamiento del perímetro y el área de los rectángulos que se formen, es a partir de la representación analítica de estos atributos. Es decir, si x representa la longitud del lado del rectángulo que descansa sobre el eje x, entonces se tiene que:

$P(x) = 2(x + 2/x) = 2x + 4/x = (2x^2 + 4)/x$

representa el perímetro del rectángulo de lado x.

$A(x) = x(2/x) = 2$

representa el área del rectángulo de lado x.

¿Qué se observa en estas dos representaciones?

En la figura 10 aparecen los elementos importantes del problema:

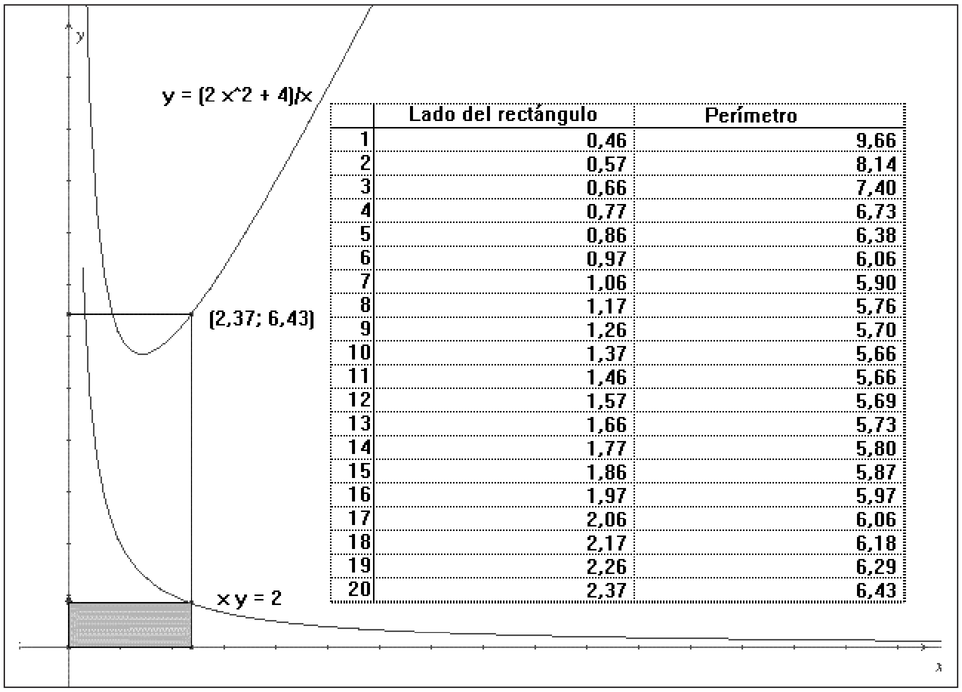
- La gráfica del perímetro y una tabla donde aparecen las dimensiones de un lado del rectángulo y su correspondiente perímetro. ¿Cómo se obtiene el otro lado? Verifique que el valor del perímetro que aparece en la tabla corresponde al rectángulo respectivo.
- Un rectángulo con dimensiones 1.39 cm $\times$ 1.44 cm, cuya área y perímetro son 2 cm^2 y 5.66 cm respectivamente.
- La gráfica de la expresión $y = 2/x$
- La gráfica del perímetro $P(x) = (2x^2 + 4) / x$

8. Describa el comportamiento de los atributos del rectángulo a partir del análisis de las representaciones anteriores.

¿Cuáles son las diferencias y semejanzas entre el comportamiento del rectángulo en la situación inicial donde uno de sus vértices estaba en una recta y ahora ese vértice está sobre la curva $y = 2/x$?

9. En la primera parte de la situación se abordaron algunos aspectos que aparecen en la representación de la línea recta. Cuando se trabajó la representación del área del rectángulo, apareció una expresión de la forma $A(x) = -2x^2 + 8x$, que es un caso particular de la expresión $y = ax^2 + bx + c$. Con la ayuda de la calculadora, o de algún programa computacional, verifique lo siguiente:

a) Cambios en *a* cambian la "anchura" de la parábola y posiblemente su concavidad y mueven el vértice.



	Lado del rectángulo	Perímetro
1	0,46	9,66
2	0,57	8,14
3	0,66	7,40
4	0,77	6,73
5	0,86	6,38
6	0,97	6,06
7	1,06	5,90
8	1,17	5,76
9	1,26	5,70
10	1,37	5,66
11	1,46	5,66
12	1,57	5,69
13	1,66	5,73
14	1,77	5,80
15	1,86	5,87
16	1,97	5,97
17	2,06	6,06
18	2,17	6,18
19	2,26	6,29
20	2,37	6,43

Figura 10

b) Cambios en *b* dejan la forma de la parábola idéntica pero trasladan el vértice.

c) Cambios en *c* trasladan la parábola verticalmente.

10. Si ahora se escribe la expresión, toma la forma $y = a(x-b)^2 + c$. Verifique con unos ejemplos que:

a) Cambios en *a* afectan solamente la anchura y la concavidad de la parábola.

b) Cambios en *b* y *c* se traducen en traslaciones horizontal o vertical de la parábola respectivamente.

c) En esta expresión el vértice de la parábola se identifica como (b,c). Así por ejemplo, la expresión $-2x^2 + 8x$, se puede escribir como $-2(x + 2)^2 + 8$, de donde el vértice viene dado por (2,8).

Capítulo 2

Artículos sobre tecnología

En este capítulo se recopilan documentos que sirvieron de base al seminario de formación de docentes llevado a cabo en la modalidad virtual, desde septiembre de 1999 y a lo largo de los años 2000 y 2001.

Bajo la asesoría del doctor Luis Moreno y con el apoyo de la Hemeroteca Nacional del ICFES, entidad que puso a disposición del proyecto una lista de discusión electrónica, se propició un permanente intercambio de ideas y el debate académico entre los participantes, además del envío de información (artículos, informes, comunicaciones) y la socialización de actividades[1]. Los puntos centrales de la discusión teórica, que sirvieron de base para la reflexión de los grupos de estudio y para consolidar la fundamentación conceptual, giraron en torno a la contribución de la epistemología constructivista a la didáctica de las matemáticas, el papel de la representación en el desarrollo del conocimiento y la cognición, la evolución del conocimiento matemático como un proceso afectado por tensiones entre lo concreto y lo abstracto y reflexiones en torno al sentido de la demostración en matemáticas, entre otros.

---

1 Próximamente saldrá publicado un documento que contiene la discusión sostenida en la LISTA DE INTERÉS desde septiembre de 1999 hasta agosto de 2001.

Educación matemática: investigación y tecnología en el nuevo siglo[2]

Teresa Rojano C. y Luis Moreno Armella
CINVESTAV – IPN, México

Introducción

A mediados del presente siglo surgen, en el panorama internacional, los primeros encuentros que se proponen discutir resultados de la investigación educativa en el campo de las matemáticas. Inicialmente la investigación se orientó hacia los llamados *errores de comprensión,* interés que llevó a la decisión de diseñar estrategias que permitieran superar las deficiencias atribuibles a los métodos de enseñanza. En este caso, el enfoque tiene como hipótesis de base una concepción del conocimiento (matemático) según la cual el significado de un enunciado es único, y en consecuencia la comprensión está en función de la transmisión. Sin embargo, sabemos que los estudiantes desarrollan formas de conocimiento que no coinciden con el conocimiento escolar oficial, lo cual está en abierto contraste con aquella supuesta *transparencia del conocimiento*.

Las concepciones iniciales sobre el conocimiento basadas en el modelo de transmisión/ recepción mecánicas, se vieron fuertemente cuestionadas por el constructivismo epistemológico y sus versiones educativas. Para entender la presencia de esta nueva manera de mirar los fenómenos de la cognición y de la educación, conviene ubicarnos en una perspectiva histórica.

En su *Crítica de la Razón Pura,* Kant afirma que al entrar en contacto con su objeto de conocimiento, el sujeto recibe impresiones sensibles que somete a un proceso organizador. Esto lo hace, según Kant, mediante sus estructuras cognitivas innatas. Así como un líquido adopta la forma del recipiente que lo contiene, así también las impresiones sensoriales adoptan las formas que les son impuestas por las estructuras cognitivas que las procesan; el resultado de este procesamiento es el conocimiento. La capacidad cognoscitiva del sujeto tiene como límites aquellos que le son impuestos por el dominio de su experiencia posible.

En síntesis, hay dos consecuencias fundamentales del enfoque kantiano. La primera es que el conocimiento deja de ser concebi-

---

2 Publicado en la revista *Avance y Perspectiva,* Vol. 18, 1999, 325 - 333.

do como *representación* de una realidad externa y, en su lugar, el conocimiento se concibe como resultado de la interacción entre el sujeto (provisto de sus estructuras cognoscitivas) y sus "experiencias sensoriales". La segunda es que el sujeto ya no es pasivo frente al objeto de su conocimiento. A esta solución brillante le faltaba contestar: ¿de dónde provienen los instrumentos cognoscitivos que sirven para transformar las experiencias del sujeto?

La epistemología constructivista piagetiana ha sido una de las respuestas más elaboradas a estos interrogantes de orden epistemológico y, sin proponérselo explícitamente, se constituyó en una base de sustentación formidable para el constructivismo desde la perspectiva de la educación. Sin embargo, las tesis epistemológicas de este constructivismo fueron, con frecuencia, trasladadas mecánicamente al campo educativo dando como resultado una especie de "deslizamiento" desde la epistemología hacia la didáctica.

La Mediación Instrumental

Cuando un niño explora su entorno llega, eventualmente, al convencimiento de que hay mucho más en su entorno material inmediato y muchos más fenómenos que no le son accesibles mediante sus excursiones locales. Esta certeza puede llegarle de innumerables formas: a través de lo que observa por la ventanilla del autobús que le lleva a la escuela, o cualquier otro medio de observación del mundo material y social que le rodea. De esta manera comprende que tiene que preguntar. No tiene respuesta para todos sus interrogantes. La pregunta es su nuevo método de exploración. El lenguaje se torna un instrumento fundamental de la socialización de sus conocimientos. Desde luego, en la escuela, esta mediación lingüística alcanza un mayor grado de sistematización: los dominios de exploración ya no son solamente los propios sino, también, aquellos propuestos institucionalmente.

La presencia de los instrumentos computacionales en la educación matemática, ha hecho evidente un principio de mediación general, sistematizado en el trabajo de Wertsch (1993):

Toda acción cognitiva es una acción mediada por instrumentos materiales o simbólicos.

Puede tratarse de un lápiz, de una caña de pescar, de un texto o de una computadora. En todos los casos, el conocimiento producido depende de los instrumentos de mediación que pongamos en juego para su construcción, y del lugar que tales instrumentos tengan en el entorno sociocultural.

Como lo ha expresado Wertsch (1993) *"el funcionamiento mental se concibe como intrínsecamente vinculado a los entornos culturales, históricos e institucionales".* Este nuevo enfoque sobre el funcionamiento cognitivo viene a completar un cuadro al que le faltaba, digamos, perspectiva. Las relaciones entre el funcionamiento cognitivo y los entornos socioculturales han recibido una atención creciente en los últimos años debido en parte a una insatisfacción con los modelos interpretativos previos y en parte también, por la presencia de los sistemas computacionales en la educación matemática. Enfaticemos esta posición con un ejemplo (Wertsch, 1998). Se trata de resaltar la relación indisoluble entre el instrumento de mediación y el agente (es decir, la persona involucrada en la acción). Al realizar una multiplicación si uno pregunta a la persona: ¿quién realizó las operaciones? seguramente contestará: "yo". Desde la perspectiva de la acción mediada, la respuesta debe ser: "*yo y la herramienta cultural que usé*". En efecto, la multiplicación exige el empleo del sistema de notación numérica de manera esencial.

Signos y representaciones

La producción de signos y representaciones es crucial para el estudio del conocimiento y de la cognición. Los sistemas de representación son instrumentos de mediación. Los sistemas de representación que usamos en las matemáticas tienen un origen cultural y por lo tanto hay una dimensión cultural en el conocimiento que se produce con el auxilio de su mediación. Esto, sin embargo, no compromete la objetividad del conocimiento, pero sí nos obliga a reformular el problema de la objetividad en términos diferentes a aquellos heredados del realismo epistemológico.

En una situación de aprendizaje, los signos forman parte de los elementos estructurantes de la relación entre el estudiante y el concepto que gradualmente se va produciendo. Cambiar el sistema de representación conduce a subrayar diferentes características del concepto emergente.

Las matemáticas, como toda otra actividad intelectual, sufren la profunda influencia de las tecnologías existentes. Con el correr del tiempo, las tecnologías se tornan "invisibles" y las actividades que se generan a partir de ellas se conciben como actividades matemáticas per se, independientes de aquella tecnología. Entonces surge, por ejemplo, la noción de una actividad matemática "pura", al margen de su entorno sociocultural. En la escuela, por ejemplo, las destrezas con los cálculos logarítmicos se ven como independientes de la herramienta y son "confundidas" con capacidades matemáticas puras. Como si el funcionamiento del sistema cognitivo fuera inmune a las herramientas *mediante* las cuales se despliega la actividad intelectual.

Las afirmaciones anteriores pueden corroborarse de manera clara en *la investigación aplicada* dentro de los sistemas educativos, en donde se puede apreciar la presencia de las ideas centrales que han conducido la evolución de la disciplina, condensada en las páginas anteriores.

Fin de Siglo: una era de investigación aplicada

La ineludible perspectiva de la entrada al nuevo milenio, impone una reformulación de lo que se enseña, del cómo y del para qué y, de acuerdo a varios autores, aparecerán en escena nuevas necesidades de preparación matemática que tendrán que ser atendidas desde la educación básica. Es decir, pueden anticiparse movimientos importantes en el campo del diseño y desarrollo curriculares, así como en la aplicación de nuevos métodos de enseñanza y uso de herramientas de aprendizaje; sin embargo, ya desde la presente década se advierte una gran influencia de los resultados de las investigaciones desarrolladas en los 80's, tanto en las reformas educativas, como en los proyectos de innovación. Así, durante los 90's se aprecia un uso intensivo, en los sistemas educativos, del saber acumulado por la comunidad de investigadores en educación matemática.

Entre los asuntos estudiados con profundidad en la época señalada, se encuentran los procesos de transición que tienen lugar en el pensamiento matemático de los alumnos cuando entran a la adolescencia, en relación a los cuales se han reportado resultados relevantes, por ejemplo, en cuanto a:

- el paso de la aritmética al álgebra
- la transición de los métodos informales a los métodos formales en la resolución de problemas
- el cambio de un pensamiento con lo específico a un pensamiento con lo general
- el paso a niveles más abstractos de pensamiento
- el tránsito del trabajo con el dibujo (nivel perceptual) al trabajo con el objeto geométrico.

Algunos de estos resultados han contribuido a la formulación de cambios en la enseñanza del álgebra en diferentes países, como por ejemplo en Inglaterra, en donde se ha pasado de poner énfasis en el papel de la manipulación simbólica a enfatizar el papel que juegan los métodos informales que utilizan los alumnos cuando resuelven problemas en matemáticas (Sutherland, 1999). De manera similar, la reforma educativa de 1993 en México le da mayor importancia al desarrollo de habilidades en los estudiantes para la resolución de problemas y elimina una buena parte del contenido relacionado con las destrezas sintácticas del álgebra (SEP, 1993).

En general, y nuevamente en relación al álgebra, puede decirse que las investigaciones de las dos últimas décadas han contribuido —junto con otros factores— a concebir nuevos acercamientos a la enseñanza y al aprendizaje de esta materia (*véase*, por ejemplo, Bednarz, Kieran & Lee, 1996). Dichos acercamientos pueden agruparse en cuatro grandes categorías:

a) *Funcional: s*e toman como nociones básicas la *variación* y el *cambio* para introducir al alumno en el mundo del álgebra, con el fin de darle a ésta un carácter dinámico.

b) *A partir de la resolución de problemas:* se plantean problemas cuya resolución conduzca al alumno a la construcción de las nociones fundamentales del álgebra.

c) *A partir de la modelación: s*e rescata el papel del álgebra como medio de modelación del mundo real.

d) *A partir de la generalización:* se parte de tareas de percepción y expresión de regularidades o patrones, para dar significado y sentido a las expresiones simbólico algebraicas.

La incorporación de nuevas tecnologías, tales como los ambientes computacionales y las calculadoras gráficas y algebraicas como herramientas de aprendizaje, ha resultado crucial para poner en obra, en el salón de clases, algunos de los nuevos acercamientos al álgebra. Así, el trabajo de J. Kaput con la herramienta del *SimCalc–Math Worlds* (Balacheff & Kaput, 1996) y el de C. Kieran con *Carapace* (Kieran, *et al* 1996) son buenos ejemplos de un acercamiento funcional, prácticamente inconcebible sin apoyo cibernético. Los estudios experimentales de Heid y Fey (the Computing Intensive Algebra Project), realizados con el apoyo de graficadores y manipuladores simbólicos, ilustran el acercamiento por medio de la modelación (Heid, 1996). La *hoja electrónica de cálculo*, por su parte, es una de las piezas de tecnología que ha mostrado una gran potencialidad para enfatizar el papel del álgebra como medio de modelación de situaciones del mundo físico (Sutherland, Rojano et al, 1996), así como para experimentar su carácter dinámico y realizar tareas de generalización tanto en versiones numéricas como "simbólicas" (con la sintaxis del propio medio computacional).

Al mismo tiempo que la presencia de las nuevas tecnologías iba incorporando una gran riqueza a los fenómenos que tradicionalmente han sido estudiados por la educación matemática, también iba haciendo presentes, junto con otro tipo de indagaciones, las limitaciones de los paradigmas de investigación puestos en práctica hasta hace poco. A este respecto, cabe mencionar que las expectativas de que mediante el uso de las nuevas herramientas, la gran mayoría de los sujetos pudiera acceder a nociones complejas y poderosas de la matemática, estaban muy basadas en la idea de que el uso de tales herramientas pudiera generalizarse a poblaciones de estudiantes de diferentes edades y de países con diferentes culturas. La hipótesis implícita de universalidad del conocimiento matemático escolar y del impacto cognitivo de las nuevas herramientas fue cuestionada, en cuanto se empezaron a realizar investigaciones interculturales con el uso de tecnología. Tal es el caso de los resultados arrojados por los trabajos anglo-mexicanos *Spreadsheets Algebra Project* y *The Role of Spreadsheets within the School-Mathematical Practices* realizadas de manera conjunta por el Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav, el Instituto de Educación de la Universidad de Londres y la Escuela de Educación de la Universidad de Bristol, en el periodo 1990-1997. En el siguiente apartado se describen someramente algunos de los resultados de estas investigaciones.

Modelación matemática: la interacción de la cultura y la práctica

Con un acercamiento sociocultural, en el proyecto *The Role of Spreadsheets within the School-Mathematical Practices* se estudian las maneras en que son utilizadas las matemáticas *en las prácticas escolares* en las materias de ciencias y el papel que juegan las *hojas electrónicas de cálculo* como una herramienta de modelación matemática (Molyneux, Rojano et al 1999). En una primera etapa, se analizaron las diferencias culturales escolares en los dos grupos estudiados de alumnos de 16 a 18 años de edad (uno en Inglaterra y uno en México) y se analizó cómo estas diferencias influían en su práctica matemática y en su trabajo con las actividades de modelación con la *hoja de cálculo*. Los resultados obtenidos reportan claras diferencias entre estos dos grupos en cuanto a sus preferencias por ciertas representaciones como la gráfica, la tabular numérica y la analítica, en cuanto a la comprensión del tipo de respuestas que se esperaba que produjeran, y en cuanto a su manera de concebir el papel de la matemática en las materias de ciencias. De manera simplificada, puede decirse que los estudiantes ingleses tendían a utilizar preferentemente la gráfica como un medio de analizar el comportamiento de un fenómeno, y que los estudiantes mexicanos tendían a utilizar la expresión algebraica. El énfasis que se pone en las escuelas inglesas en el uso de gráficas y en el acercamiento cualitativo al estudio de las ciencias puede ser una explicación plausible de que estos estudiantes se muestren más confiados y prefieran utilizar las gráficas, mientras que la valoración que se le da al conocimiento formal y a las respuestas exactas en el aula mexicana de matemáticas puede explicar el que los estudiantes mexicanos privilegien el uso de la expresión analítica de la variación. Aunque las preferencias de los estudiantes por un tipo particular de representación no se modificaron significativamente mediante el uso de la *hoja electrónica* como recurso de modelación, al final del trabajo experimental, la mayoría reconocía lo valioso que era poder utilizar diversas representaciones. Además, mostraron haber desarrollado la habilidad necesaria para interpretar el comportamiento de fenómenos del mundo físico a través de dichas representaciones. Una de las implicaciones de estos resultados es que los procesos cognitivos que se desencadenan durante el aprendizaje no tienen lugar al margen de la cultura y los valores relativos a la matemática escolar, por más que el diseño experimental contemple condiciones equivalentes en cuanto a las actividades de modelación y a las herramientas informáticas disponibles en ambos grupos.

Las Calculadoras Algebraicas

Las calculadoras algebraicas actuales incorporan, además de los sistemas de representación numérico y gráfico, un sistema de manipulación algebraica. En otras palabras, esto significa que, además de manipular números y graficar funciones, la calculadora puede manipular expresiones algebraicas (factorizar polinomios, derivar simbólicamente una función, hallar su antiderivada, hallar la expresión en fracciones parciales de una función racional, etc.). Nos referimos en particular a estos instrumentos pues su presencia en los sistemas educativos es más factible y, porque representan una generación de instrumentos informáticos compatibles con las computadoras tradicionales. Gran parte de la investigación ha tomado en cuenta la transformación de estas herramientas en instrumentos matemáticos escolares (Ruthven, 1996; Guin, D. y Trouche, L. 1999)

Una situación matemática puede ser estudiada desde cualquiera de estos puntos de vista (numérico, gráfico o simbólico) y, lo que resulta aún más importante desde una perspectiva cognitiva, dicha situación puede estudiarse integradamente, *desde los tres puntos de vista* abriendo así la posibilidad a un establecimiento de nuevas relaciones entre las representaciones y, por ende, a una mayor elaboración conceptual de los objetos matemáticos involucrados en la situación bajo estudio. No es extraño pues, que las calculadoras algebraicas hayan resultado de interés para la comunidad de investigadores y educadores preocupados por entender el proceso de articulación:

currículum ⟷ tecnologías informáticas,

y también el *proceso de producción de los objetos matemáticos*. Es importante señalar a este respecto, que las investigaciones recientes (Balacheff y Kaput, 1996) han mostrado que el mayor impacto de las tecnologías en los sistemas educativos ha sido de orden epistemológico y cognitivo, pues han contribuido a generar una nueva forma de realismo a partir de las opciones de manipulación abiertas por las representaciones computacionales. En esta dirección las investigaciones son amplias y numerosas (*véase* la bibliografía de este artículo). Un tema recurrente ha sido el estudio del *impacto sobre las prácticas escolares*. Es un punto de vista que se cristaliza en los proyectos de investigación aplicada (Moreno, Rojano, Bonilla y Perrusquía, 1999).

El papel de los instrumentos va más allá que el de servir de *prótesis para la acción*. La presencia de tales instrumentos puede *reorganizar* todo el funcionamiento cognitivo. Por ejemplo, puede contribuir al rediseño de las estrategias de resolución de problemas y a la reconceptualización mediante la sustitución de un sistema de representación. No olvidemos que toda acción orientada a un aprendizaje, es una acción instrumental — basta recordar las profundas transformaciones en las sociedades como consecuencia del paso de las tradiciones orales a las escritas (Donald, 1993); la escritura en las sociedades modernas no puede disociarse de los instrumentos tecnológicos como papel, lápiz (sin que ello implique su reducción a una forma de tecnología).

De cara a las calculadoras algebraicas estamos entonces ante dos posibilidades:

i) entenderlas como herramientas de *amplificación*

ii) entenderlas como herramientas de *reorganización cognitiva*.

En realidad, como veremos más adelante, estas posibilidades constituyen las dos etapas de un mismo proceso: al introducir las calculadoras en la actividad de los estudiantes, se termina produciendo una *nueva actividad matemática* que, a su vez, genera una reorganización del conocimiento de los estudiantes. Debemos apresurarnos a decir que el paso de *(i)* a *(ii)* no es automático y es mas bien lento y complejo (Moreno, 1999). Por esto, tiene sentido desde una perspectiva curricular, examinar a fondo el papel de la calculadora como instrumento de amplificación dentro de un currículum establecido. Esto ocurre dentro de un *proyecto de desarrollo*. El paso de *(i)* a *(ii)* conviene investigarlo dentro de un *proyecto de investigación*.

Uno de los objetivos de la investigación en este terreno es tratar de entender cómo hay que realizar la implementación de la tecnología. Bien sabemos que la primera etapa puede implicar que tengamos que trabajar dentro del marco de un currículum establecido previamente. Pero las innovaciones exitosas tendrán la capacidad de *erosionar* los currículos tradicionales. Aquí es donde la comprensión que alcancemos sobre el conocimiento producido con la mediación de las herramientas informáticas, se torna necesaria.

Estos procesos de amplificación y re-organización pueden ilustrarse de la siguiente manera. La función de amplificación sugiere pensar en una lupa. La lupa deja ver, amplificado, aquello que podía ser visto a simple vista. No cambia, por esto mismo, la estructura del objeto de nuestra visión. La función de reorganización sugiere pensar en un microscopio. Con el microscopio podemos ver lo que no era posible sin él. Accedemos entonces a un nuevo estrato de la realidad. Se abre la posibilidad de estudiar algo nuevo y de acceder a un conocimiento nuevo.

Todavía no entramos de lleno en la edad de la cultura virtual. Por ello, aunque son las capacidades cognitivas superiores (modelar, interpretar, etc.) las que más valoramos en las instituciones escolares, se siguen enfatizando las destrezas computacionales sin reconocer que esas destrezas son propias de una *tecnología invisible* (papel y lápiz) y no características de un pensamiento matemático profundo. De allí que las nuevas tecnologías, que todavía *no* se han hecho *invisibles* y que permiten que ciertos cálculos se realicen pulsando una tecla (por ejemplo: extraer una raíz cuadrada) desafían nuestras concepciones tradicionales sobre lo que constituye la verdadera capacidad matemática.

La tradición ha tendido a concebir la inteligencia como algo que reside enteramente en el individuo (Kant es uno de los principales forjadores de esta tradición en el mundo moderno). En una nueva etapa tecnológica que nos ha dado *sistemas de representación ejecutables* (que externalizan ciertas funciones cognitivas, por ejemplo graficar una función), esa concepción de inteligencia representa un obstáculo para imaginar nuevas formas de empleo de las nuevas tecnologías en nuestros sistemas educativos.

Por ejemplo, un estudiante dotado de una calculadora graficadora tiene el potencial de desarrollar nuevos métodos, nuevas estrategias de graficación, sacando partido de las capacidades de procesamiento de graficación de su calculadora. Esto se ha puesto en evidencia en diversas oportunidades durante sesiones de graficación de funciones. Los estudiantes desarrollan estrategias de graficación incorporando la tabla de valores que suministra la calculadora, *como parte estructural de la función*.

La sinergia que puede entonces ponerse en marcha, capacitaría al estudiante para trabajar a un nivel de complejidad matemática que puede ser totalmente inalcanzable sin dicha tecnología. Una asociación *inteligente* del estudiante y su calculadora amplía su *zona de desarrollo próximo* (Wertsch, 1993) pues le permite descargar en el instrumento la realización de cálculos, cuya elaboración, por parte del estudiante, se convierte en una meta en la instrucción tradicional. Imaginando al estudiante con su calculadora, *como un sistema*, y entendiendo que la actividad de este sistema es una forma legítima de actividad matemática, la evaluación debe incluir, entonces, la evaluación de tal sistema.

Los anteriores son ejemplos del impacto que está teniendo la investigación y el uso de las nuevas tecnologías en los programas y proyectos de transformación de las prácticas matemáticas en la escuela. Eso, que es una muestra de que nos encontramos en una era de las aplicaciones, en la que se intenta aprovechar los frutos de la investigación para hacer accesibles a los alumnos de todas las edades las ideas poderosas en matemáticas y en la que se dan replanteamientos de fondo de la educación matemática en todos los países, también nos plantea la necesidad de recuperar el interés por la laboriosa tarea de la investigación básica, a fin de profundizar en la naturaleza del conocimiento matemático que se genera a través de los nuevos contenidos de enseñanza planteados y de las habilidades que se desarrollan con el uso de los nuevos medios y herramientas de aprendizaje.

Reconocimientos

Agradecemos al Conacyt el apoyo otorgado para el desarrollo del proyecto *Incorporación de nuevas tecnologías a la cultura escolar: la enseñanza de las matemáticas y la ciencia en la escuela secundaria* (ref. No. G26338), y a la Fundación Spencer, por el financiamiento al proyecto anglo/mexicano *The Role of Spreadsheets within the school-based mathematical practices* (grant. No. B-1493).

Referencias

Balacheff, N. y Kaput, J. (1996). *Computer-Based Learning Environments in Mathematics*. En Bishop, A. *et. al.* (eds) International Handbook of Mathematical Education, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London.

Bednarz, N., Kieran, C. & Lee, L. (1996) *Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching*, Kluwer Academic Publishers, The Netherlands.

Donaldson, M. (1993). *Origins of the Modern Mind*. Harvard University Press.

Guin, D. y **Trouche, L**. (1999). *The complex process of converting tools into mathematical instruments: The case of calculators*. International Journal of Computers for mathematical Learning, 3, 195-227.

Heid, K. (1996) *Reflections on Mathematical Modeling and the Redefinition of Algebraic Thinking*, cap 16. En Bednarz, N., Kieran, C. & Lee, L. (eds.) *Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching*, Kluwer Academic Publishers, The Netherlands.

Kieran, C., Boileau, A. & Garançon, M. (1996) *Introducing Algebra by means of a Technology-Supported Functional Approach*, cap 19. En Bednarz, N., Kieran, C. & Lee, L. (eds.) *Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching*, Kluwer Academic Publishers, The Netherlands.

Molyneux, S., Rojano, T., Sutherland, R & Ursini, S. (1999) *Mathematical Modelling: the Interaction of Culture and Practice*, En Boero, P. (ed.) *Mathematics in Context*, Número especial por aparecer en Educational Studies of Mathematics, Kluwer Academic Publishers, The Netherlands.

Moreno, L. & Rojano, T. (1998). *Las Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas y Ciencias*, Avance y Perspectiva, vol. 17.

Moreno, L. (1999). *On Representations and Situated Tools*. Proceedings PME-NA, 1999, (por aparecer).

Moreno, L., Rojano, T., Bonilla, E. y Perrusquía, E. (1999). *The incorporation of new technologies to school culture: the teaching of mathematics in secondary school*. Proceedings of PME-NA, 1999 (por aparecer).

Ruthven, K. (1996). *Calculators in the Mathematics Curriculum: The Scope of Personal Computational Technology*. En Bishop, A. *et. al.* (eds.) International Handbook of Mathematical Education, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London.

Sacristán, A., Noss, R. y Moreno, L. (1999). *Situated abstractions–situated proofs: constructing generalizations and testing conjectures in an infinite processes microworld* (en preparación).

Secretaría de Educación Pública (SEP) (1993) *Planes y Programas de estudios*, México.

Sutherland, R., Rojano, T. and Mochón, S. & Molyneux, S. (1996). *Mathematical Modelling in science through the eyes of Marina and Adam*, en Puig, L. & Gutiérrez, A. (eds.) *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Valencia, España, Vol. 4, pp 291-298

Sutherland, R. (1999). *School Algebra: the Effects of Educational Reforms*, paper presented at the Annual American Educational Research Association Conference, Montreal, Canada.

Wertsch, **J**. (1993). *Voces de la mente*. Madrid: Visor Distribuciones.

Wertsch, J. (1998). *Mind in Action*, CUP.

La epistemología genética: una interpretación[3]

Luis E. Moreno Armella
CINVESTAV – IPN, México

Resumen

En este artículo nos proponemos introducir la epistemología genética (constructivista) desarrollada por la escuela piagetiana. Esta epistemología constituye una ruptura profunda con las epistemologías tradicionales, tanto empiristas como racionalistas, pues en ella se redefinen conceptos centrales como *conocimiento y realidad* a partir de un nuevo enfoque sobre las interacciones del sujeto cognoscente y su objeto de conocimiento. Los métodos psicogenético e histórico-crítico están articulados de manera tal que constituyen la base empírica de la epistemología constructivista, otorgándole entonces, un nivel de cientificidad del que carecen las demás teorías epistemológicas. De allí que sea pertinente tomarla como fundamento para construir las bases epistemológicas de la educación científica.

Abstract

We will introduce the genetic Epistemology developed by the Piagetian School, which embodies a radical departure from traditional epistemologies (empiricism and rationalism). A novel viewpoint is established regarding the interaction between a cognizing subject and its object of knowledge. Historico-critical analysis and psychogenesis constitute the empirical scaffolding for this constructivist epistemology, wherewith it obtains a scientificity status foreign to other theories. It follows that Genetic Epistemology is appropriate as an epistemological basis for Science Education.

Introducción

La epistemología genética se propone, como uno de sus objetivos, el análisis de la formación y el desarrollo del conocimiento, en particular, del conocimiento científico. Pero la formación y el desarrollo del conocimiento sólo son posibles porque hay interacción entre un sujeto cognoscente y un objeto de conocimiento.

La historia de las epistemologías, empiristas y aprioristas, muestra que se las puede caracterizar mediante el "peso" que otorgan o bien al sujeto o bien al objeto de conocimiento, *a la hora de la interacción*. Sin entrar en mayores detalles, vale la pena detenernos un momento en la consideración de estas epistemologías. El empirismo supone que el sujeto es esencialmente pasivo en la relación sujeto-objeto y afirma en consecuencia, que el conocimiento tiene su origen en el dato per-

[3] Artículo publicado en la Revista Educación Matemática, Vol. III (3), pp. 5-23, 1996.

ceptual, suministrado por el objeto. El conocimiento es un modelo-copia del objeto. Esta posición se hizo célebre desde Aristóteles, para quien nada había en el intelecto que no hubiese estado antes en los sentidos.

El apriorismo, por su parte, supone que todo el peso en la interacción lo lleva el sujeto. Mediante sus estructuras cognitivas constituidas de antemano, el sujeto *captura* al objeto para producir el conocimiento.

Pues bien, la historia de las epistemologías tradicionales consiste, en esencia, en una especie de competencia entre estas posiciones, empirista y apriorista, que desde luego no se mantuvieron intactas sino que fueron desarrollándose como respuesta a las críticas y objeciones que les planteaban sus adversarios. Nuestro siglo ha presenciado el desenvolvimiento del *empirismo lógico*, sin duda el producto más desarrollado del pensamiento empirista. Del lado del apriorismo, quizá la posición más sólida provino del sistema kantiano. Habremos de regresar a ella.

En todos estos casos, el sujeto que conoce es un sujeto adulto, en pleno dominio de sus facultades intelectuales. Y el objeto de conocimiento es (casi siempre) un objeto inmodificable. De modo que la relación sujeto-objeto está concebida, en estas epistemologías, como una relación de un único nivel.

Piaget y la Epistemología

La obra epistemológica de Piaget (1896-1980) vino a cambiar este estado de cosas. Naturalmente, no es un trabajo de generación espontánea que rompe con el pasado simplemente porque lo ignore. En la obra piagetiana volveremos a encontrar la preocupación por la estructura de la relación sujeto-objeto. Como ocurre con frecuencia en el trabajo renovador, no es el problema central el que cambia sino la forma de indagar sobre él, la forma de concebir preguntas nuevas sobre ese problema que ha estado ante nosotros. Para Piaget, el conocimiento no es resultado ni de la sola actividad del sujeto, ni tampoco de la sola presencia del objeto. El conocimiento (y en esto ya se aparta de las epistemologías tradicionales) surge de la interacción del sujeto y el objeto, en la cual cada uno influye sobre el otro. Ya no será posible concebirlos separados: sujeto-objeto es una unidad dialéctica indisociable.

Conviene hacer notar que la forma de concebir la estructura sujeto-objeto en la epistemología piagetiana, guarda una cierta relación con la forma correspondiente en la epistemología kantiana. Presentemos primero algunas ideas centrales de la epistemología kantiana para después apreciar mejor las diferencias.

El sujeto cognoscente kantiano viene dotado (*de fábrica*) de una estructura intelectual que le permite *interpretar sus registros perceptuales*. En la introducción de su Crítica de la Razón Pura (Kant, 1972, p. 27), Kant nos dice:

> *"No hay duda alguna de que todo nuestro conocimiento comienza con la experiencia. Pues ¿por dónde iba a despertarse la facultad de conocer...como no fuera por medio de objetos que hieren los sentidos...y elaboran así con la materia bruta de las impresiones sensibles, un conocimiento de los objetos llamado experiencia?... mas si todo nuestro conocimiento comienza con la experiencia no por ello se origina todo él en la experiencia. Bien podría ser que nuestro conocimiento fuera compuesto de lo que recibimos por medio de impresiones y de <u>lo que nuestra facultad de conocer (...) proporciona por sí misma sin que distingamos este añadido de aquella</u>*

> *materia fundamental...” (subrayado nuestro)*

Tenemos entonces, de acuerdo a Kant, una facultad de conocer antes de la experiencia sensorial, que combinada con la percepción sensorial produce una forma de conocimiento en la que no es fácil ya distinguir, por separado, ni el aporte del sujeto ni el aporte del objeto. Toda la experiencia sensorial es pasada a través del tamiz constituido por las estructuras cognitivas (inherentes) del sujeto. De modo que nuestro conocimiento del mundo, no es una *representación* (en el sentido de un modelo-copia) de esa realidad externa *en* nuestro intelecto (a pesar de la seducción del término *representación* sobre el que tendremos que volver), sino una *interpretación,* una *reconstrucción* que hacemos tomando nuestros registros perceptuales como materia prima y sometiéndolos al influjo de esa *máquina de interpretar y organizar* constituida por nuestro intelecto. Hasta aquí las semejanzas. Semejanzas, no coincidencias, como tendremos oportunidad de mostrar a continuación. Vayamos pues a las diferencias.

Para Piaget, el conocimiento tampoco es una copia de la realidad exterior al sujeto. Pero, en la interacción entre el sujeto y el objeto, aquél se acerca al objeto con determinadas estructuras intelectuales que le permiten asimilarlo y, al mismo tiempo, el objeto ejerce su influencia sobre el sujeto obligándolo a modificar sus estructuras cognitivas. Por una parte pues, el conocimiento es resultado de la interacción y además (aquí hay ya una diferencia de fondo) *tanto el sujeto como el objeto se transforman como resultado de la interacción*. Así que, la próxima vez que el sujeto se acerque al objeto, ya será *otro* sujeto epistémico el que participa en la interacción y será *otro* objeto de conocimiento el asimilado a sus (nuevas) estructuras cognitivas. Los niveles de interacción van cambiando como consecuencia de la actividad cognitiva del sujeto. El conocimiento producido no es ni una copia de la realidad externa al sujeto, ni tampoco es un estado: el conocimiento se halla en un permanente estado de re-elaboración. Es decir, las conquistas cognitivas del sujeto se van transformando continuamente dentro de aquella interacción. Piaget lo ha expresado así, (*véase* Piaget 1995, p. 324):

> *La actividad intelectual comienza por la confusión entre la experiencia y la conciencia de sí, por la indiferenciación entre la asimilación y la acomodación...el conocimiento del mundo exterior comienza por una utilización inmediata de las cosas... la inteligencia no comienza así ni por el conocimiento del yo ni por las cosas en cuanto tales sino por su interacción y orientándose simultáneamente hacia los dos polos de esa interacción, la inteligencia organiza al mundo organizándose a sí misma (subrayado nuestro).*

Otra diferencia de fondo se halla en el origen de las estructuras cognitivas. Para Kant, ellas son inherentes al sujeto. Para Piaget, las estructuras cognitivas se construyen. Tal construcción empieza desde la más tierna edad; es un proceso complejo, cuya explicación ha requerido más de medio siglo de investigación psicológica y aún no termina. Fue necesario elaborar una disciplina, la *psicología genética*, para dar una respuesta a este interrogante fundamental. En la próxima sección daremos algunas indicaciones a este respecto.

Asimilación y niveles de desarrollo

La naturaleza de los contenidos producidos en la relación sujeto-objeto, depende del grado de desarrollo cognitivo de este sujeto. La construcción de las estructuras cognitivas comienza, de acuerdo a la teoría piagetiana, desde el nacimiento mismo del sujeto. Hablamos de *sujeto*, no del *niño*, por razones de énfasis. Nos interesa resaltar las características del niño, del adolescente, del adulto en tanto sujetos epistémicos.

En el desarrollo cognitivo, la primera etapa es de *acción externa pura*. La adquisición clave de este periodo es el *esquema sensoriomotor*. Un esquema es aquello que es repetible y generalizable en una acción. Por ejemplo, succionar (el biberón primero, luego se transfiere al dedo u otro objeto material), jalar, agarrar, etc. Los esquemas de acción son algo así como *conceptos prácticos* que sirven para incorporar objetos a las acciones. Con respecto a la inteligencia sensoriomotriz, Piaget nos dice (véase Piaget 1995, p. 7):

> *El estudio de la inteligencia sensoriomotriz o práctica durante los dos primeros años del desarrollo nos ha enseñado cómo el niño que asimila directamente el medio externo a su propia actividad desde un principio, construye después, para prolongar esa asimilación un número creciente de esquemas a la vez más móviles y aptos para coordinarse entre sí.*

Una de las fuentes de confusión y dificultad cuando tratamos con una disciplina altamente organizada es que las palabras adquieren un significado más preciso, un matiz distinto al que tienen cuando se las emplea en el lenguaje cotidiano donde la libertad de interpretación deja márgenes amplios y al mismo tiempo difusos, al campo semántico de las palabras. Por ello, términos como *asimilación, equilibración, conocimiento, objetividad,* etc. tendrán que ser gradualmente redefinidos de acuerdo a la epistemología genética. Lo empezaremos a hacer como si se tratara de tejer una red con los significados de términos considerados como centrales dentro de la teoría.

Insistamos un poco más en la noción de esquema. Podemos describir un esquema como un *núcleo de acción transferible*. El esquema tiene tres componentes:

i) un mecanismo de reconocimiento de situaciones

ii) una actividad vinculada a esos reconocimientos

iii) una expectativa sobre el resultado de la actividad (Glasersfeld, 1991, p. 121).

La *asimilación* de un objeto a un esquema de acción, consiste en identificarlo como *admisible* para desempeñar cierta función. Tal identificación es un acto de abstracción. Por ejemplo, si necesitamos un martillo, podemos sustituirlo por un objeto duro, más o menos pesado. Incorporamos así ese objeto al esquema. Eso significa que lo identificamos como viable para la acción de martillar. Si la expectativa sobre el resultado no es satisfecha, entonces debemos modificar el esquema: no se puede incluir cualquier objeto duro y pesado si además, por ejemplo, es frágil. Esta modificación del esquema, debido a la *presión* del objeto que se trata de asimilar, se conoce como *acomodación*. La pareja indisociable asimilación-acomodación tiene un lugar central dentro de la teoría, por lo que estaremos volviendo sobre ella. Por ahora añadiremos que la asimilación es un acto de interpretación, de cómo el sujeto incorpora al objeto, mientras que la acomodación es una respuesta del esquema al objeto. Resulta del mecanismo de *equilibración del esquema*.

El periodo sensoriomotor es de acción pura. Los esquemas están orientados hacia el exterior: un esquema de acción es como el equivalente práctico de un concepto. Mediante la actividad sensoriomotriz el sujeto logra la construcción de *la permanencia del objeto*. Esta adquisición es de suma importancia. Tratemos de imaginar la concepción que tendríamos del espacio si todos los cuerpos fueran gaseosos, fugaces... Cuando los objetos percibidos siguen existiendo fuera de nuestro campo visual, se ha dado entonces un gran paso en la construcción del espacio.

Piaget mismo nos dice (Piaget 1995, p. 11) a este respecto:

> *Un mundo sin objetos no podría presentar el carácter de homogeneidad espacial y de coherencia en los desplazamientos que define nuestro universo. Por otro lado, la ausencia de "grupos" en los cambios de posición... equivaldría a transformaciones sin retorno, es decir, a continuos cambios de estado, a la ausencia de objetos permanentes.*

En esta cita, *grupos* se refiere a que para cada desplazamiento haya la posibilidad de efectuar el desplazamiento inverso. Como avanzar y retroceder por el mismo camino.

Para el sujeto adulto resulta inconcebible el darse cuenta que hubo un tiempo en que él no había construido la permanencia de los objetos. No somos conscientes de muchas de estas construcciones. Quizá esto explique, al menos parcialmente, por qué en el pasado, las epistemologías siempre supusieron un sujeto adulto, activo o pasivo, en la relación con el objeto de conocimiento. No fueron conscientes de que esa relación era cambiante y que dependía del desarrollo cognitivo del sujeto. En un plano más familiar: el experto no puede esperar que su discípulo tenga un conocimiento con el mismo grado de organización que el suyo. Eso exige un proceso largo y complejo que no se reduce a la lectura de textos, pues, entre otras cosas, no es cuestión de *acercarse* a un conocimiento que le está esperando allí afuera, sino de comprometerse en un proceso constructivo. Cuando Kant habla de las estructuras a priori del sujeto (es decir, de las estructuras instaladas ya de nacimiento), con las cuales organiza al mundo, es como si empezara a contarnos una historia que, desde la perspectiva genética, hace rato ya comenzó.

Después de la permanencia del objeto, otra adquisición central del sujeto la constituye la *capacidad de representación*. Aquí están incluídos el juego y la imitación, por ejemplo. De esta manera, el mundo de la acción queda enriquecido con la posibilidad de *representar las acciones*. A pesar de este progreso que mostrará todo su potencial un poco más adelante, en esta etapa el pensamiento del sujeto sigue *anclado* a la esfera del comportamiento motor. El sujeto *confía* en su experiencia perceptual; el progreso se empieza a manifestar en la posibilidad de *representación de situaciones pasadas*.

Posteriormente, las acciones interiorizadas se organizan de manera tal que adquieren la *reversibilidad*. Por ejemplo, ante la pregunta de si hay más plastilina en una bola o en la salchicha que se hace con la misma bola, el sujeto contesta que igual porque *basta deshacer la salchicha y convertirla de nuevo en la bola original*. Este argumento tiene ya en él la necesidad lógica, que manifiesta la aparición del pensamiento lógico. Aunque ya se tiene la capacidad de representar operaciones (acciones simbolizadas mentalmente que son reversibles, como en el ejemplo anterior) y de razonar lógicamente, el pensamiento sigue anclado a lo concreto: las operaciones sólo se pueden aplicar a objetos materiales. La capacidad de construir seriaciones, clasificaciones (de objetos por su tamaño, por ejemplo), correspondencias entre colecciones, son características del periodo.

Más adelante el sujeto arriba al periodo de las *operaciones formales*. En él, aparece la reversibilidad en el plano lógico; el pensamiento abstracto y sobre todo, el pensamiento hipotético-deductivo. Debe decirse, que la transformación de las estructuras cognitivas del sujeto no es un proceso de maduración, en el que aquél *se sienta a esperar la llegada de las estructuras cognitivas*. La construcción cognitiva implica un proceso activo. Eso no significa, por otra parte, como ya hemos tenido oportunidad de señalar, que las construcciones sean siempre conscientes.

Un error que no debe cometerse es suponer que estas etapas del desarrollo cognitivo están claramente separadas. No es así. Es más adecuado pensar las etapas como referencias generales, como registros de características centrales del desarrollo cognitivo. Cada una de las cuales quedará subsumida en la etapa siguiente. Es decir, (Piaget-García, 1983, p. 9):

> *...no sólo los estadios sucesivos de la construcción de las diferentes formas del saber son secuenciales –es decir, que cada uno es a la vez resultado de las posibilidades abiertas por el precedente y condición necesaria de la formación del siguiente– sino, además, cada nuevo estadio comienza por una reorganización a otro nivel, de las principales adquisiciones logradas en los precedentes.*

Asimilación y acomodación

La capacidad de simbolización y la interiorización de las acciones conducen eventualmente a la formación de operaciones y de esquemas conceptuales. Un objeto se le conoce cuando se le asimila a un esquema. La asimilación es un acto de interpretación mediante el cual un objeto es reconocido como *admisible* (recordemos el ejemplo del esquema *martillar*). Entonces, al ser asimilado a un esquema, un objeto queda inserto en una red de relaciones, mediante las cuales adquiere significado. Es decir, el objeto es conceptualizado. De esta forma, el sujeto va organizando sus experiencias y, mediante la coordinación de esquemas, va construyendo estructuras cognitivas cada vez con mayor nivel de organización. Consideremos los ejemplos siguientes: percibir *algo* como una montaña, es asimilar ese algo mediante cierta estructura cognitiva, estructura constituida por un sistema de esquemas que involucran espacio, sustancia y volumen. Otro ejemplo: cuando percibimos algo como una llave, ese reconocimiento del objeto no tiene que ver con el hecho de que sea metálico sino con su forma, que sugiere su función. Es decir, *llave* es un concepto *operativo*. El objeto de nuestra cognición no *llega* directo a nuestro sistema cognitivo. Lo que se produce es *una interpretación* del objeto material (o conceptual, ya veremos ejemplos) en términos de estructuras cognitivas anteriores. Si la interpretación permite la acción del sujeto sin mayores conflictos, diremos que se ha producido una asimilación conservadora. Este tipo de asimilaciones fija el esquema en cuestión dentro de la estructura cognitiva. Puede ocurrir, empero, que la asimilación al esquema no genere el resultado esperado. En ese caso, ocurre una *desequilibración* del esquema cognitivo. El esquema (o la estructura cognitiva) *responde* entonces a la perturbación, acomodándose a su contenido.

Un objeto, tal como lo entendemos en determinado momento, es una conceptualización. La construcción del objeto, que continúa indefinidamente es, desde la perspectiva del sujeto, parte del proceso de interiorización de su entorno.

Esa interiorización es un proceso de conceptualización del entorno y en ese sentido, podemos afirmar que el entorno adquiere así, su dimensión histórica. Queda humanizado. La objetivación del conocimiento depende entonces del aumento de actividad cognitiva por parte del sujeto, dando como resultado estructuras más *equilibradas*.

> *En sus comienzos, la asimilación es esencialmente la utilización del medio externo por el sujeto con el fin de alimentar sus esquemas hereditarios o adquiridos. Es evidente que tales esquemas, visión, succión, prensión, tienen necesidad de acomodarse continuamente a las cosas.*

> *A medida que los esquemas se multiplican...la asimilación deja pues de incorporar simplemente las cosas a la propia actividad para establecer una red de relaciones cada vez más estrecha de coordinaciones entre los esquemas que definen a ésta y en consecuencia entre las cosas a las que dichos esquemas se aplican.(Véase Piaget 1995, p. 321).*

Un poco más adelante (p.325) añade:

> *La asimilación y la acomodación constituyen así, desde el plano sensoriomotor, un proceso formador análogo al que representan en el plano de la inteligencia verbal y reflexiva, las relaciones del pensamiento individual y la socialización: del mismo modo que la acomodación al punto de vista de los otros permite al pensamiento individual situarse en un conjunto de perspectivas que asegura su objetividad y reduce su egocentrismo, igualmente, la coordinación de la asimilación y la acomodación sensoriomotrices, conduce al sujeto a salirse de sí mismo para (...) objetivar su universo.*

En estas citas se encuentra ya la clave para explicar *la objetividad* desde un enfoque epistemológico construtivista. Es decir, desde un enfoque que no toma la objetividad como algo que pueda existir al margen del sujeto, al margen del observador.

Epistemología y Psicología

Es frecuente que una epistemología haga referencia a hechos psicológicos. Por ejemplo, el empirismo nos dice que *el sujeto es pasivo y se limita a registrar los datos que le suministra la experiencia*. Sin embargo, el empirismo no ha dado, en ningún momento de su desarrollo, pruebas de que el sujeto se comporte, en efecto, como allí se dice. Si no hay una experimentación, como la que ha desarrollado la epistemología genética a través de la psicología genética, carecen de fundamento tal tipo de afirmaciones. Por su parte, Piaget logró sacar a la epistemología del terreno especulativo y convertirla en una investigación en donde las afirmaciones sobre el conocimiento, sobre el sujeto epistémico, estuvieran fundamentadas en un trabajo experimental y sistemático. Es decir, llevó a la epistemología al status de ciencia experimental.

La epistemología genética es el estudio de la constitución del conocimiento válido. Es decir, el estudio de las condiciones mediante las cuales se produce el conocimiento y además el de los métodos que validan ese conocimiento. La primera condición es de carácter fáctico y la segunda de carácter normativo. La epistemología genética trata de cuestiones que involucran cuándo una afirmación puede ser justificada y bajo qué criterios. Los criterios psicogenéticos han alcanzado tal notoriedad que a veces se confunde todo el edificio piagetiano con la psicología genética.

Hay otro terreno que también es fuente de fundamentación empírica para la epistemología: la historia de la ciencia.

Esto es particularmente importante a la hora del estudio epistemológico de las matemáticas. En relación a esta disciplina, podemos argumentar que los problemas de orden normativo son más o menos claros. Tienen que ver con los procesos deductivos, con la estructura de las demostraciones. Las cuestiones de orden fáctico se abordan (principalmente cuando vemos las matemáticas como un cuerpo de conocimientos constituido) desde la historia. Es pertinente responder la pregunta: ¿cómo se concibe a la historia en este programa de investigación? de inmediato podemos responder que no se concibe como un relato lineal, en el que cada cosa tiene un antecedente claramente diferenciado. Más bien, la historia será concebida de acuerdo a la ya celebre expresión del historiador holandés Dijkterhuis, (véase Piaget-García,1982, p.60) como *un laboratorio epistemológico*. ¿Qué significa esta expresión? Quiere decir que la historia, desde el punto de vista epistemológico, debe investigarse buscando en ella las condiciones que han hecho posible el conocimiento y los mecanismos de su validación. Será necesario entonces recuperar la dinámica del desarrollo histórico pues es en la dinámica donde aparecen los mecanismos de paso de una etapa a la siguiente. Como ya hemos hablado de dos procesos de transición de un nivel de conocimiento a otro mejor (en la historia y en la psicogénesis) resulta natural que parte de la experimentación en el dominio de la epistemología genética incluya una comparación entre estos estratos de desarrollo.

Podría pensarse que los estudios psicogenéticos y los estudios históricos son dos formas totalmente diferentes de abordar los problemas de construcción de los conocimientos. Sin embargo, la epistemología genética se encarga de argumentar con fuerza que los mecanismos de desarrollo del conocimiento a nivel histórico son los mismos que los correspondientes a nivel psicogenético. Esta es una tesis que no quisiéramos dejar de señalar, aunque requiere de un análisis más cuidadoso que el que podremos hacer en este momento (*véase* Piaget-García, 1982).

Regresemos al problema de los hechos y las normas. Tanto en la historia como en la psicogénesis, puede observarse que los hechos y las normas no permanecen desvinculados unos de las otras. La razón es que el sujeto y el objeto de conocimiento están indisolublemente vinculados. Entonces aunque se trate de la validación dentro de un sistema lógico, de una cierta proposición, no podemos olvidar que hay un problema de hecho (en este caso psicogenético) involucrado, como lo es la construcción de la lógica por el sujeto. De allí que la significación epistémica de este instrumento de conocimiento —es decir, su empleo para la construcción de un conocimiento válido—, no es independiente de su modo de construcción (*véase* la Introducción en Piaget-García, 1982).

Aspectos figurativos y operativos del pensamiento

La *representación* nos remite a los aspectos operativos del pensamiento, mientras que la *percepción* nos remite a los figurativos. Veamos un ejemplo. Tenemos dos recipientes, uno delgado y alto y uno ancho y bajo. Vamos a trasvasar un líquido del recipiente delgado al ancho. Si le preguntamos a un niño pequeño (alrededor de los 7 años o menos) *antes de hacerlo*, si la cantidad de líquido permanecerá igual después de trasvasar el líquido, no sabe qué contestar.

Cuando se efectúa el trasvasamiento, en su presencia, y él verifica que el nivel del líquido en el recipiente ancho es inferior al que tenía en el recipiente delgado, entonces concluye que la cantidad de líquido ha cambiado: *ahora hay menos*, es su respuesta. Es una respuesta típica de esta etapa el que los sujetos privilegien una de las dimensiones (la altura) del vaso a la hora de la interpretación del dato perceptual. Este aspecto figurativo del pensamiento, será sustituido más adelante, cuando el sujeto ya esté en posesión de la reversibilidad aún cuando sea al nivel de las operaciones concretas. Es decir, realizadas sobre objetos materiales. Entonces, el sujeto podrá comprender que hay una compensación: el líquido *sube* menos porque ahora su superficie es mayor. Inclusive puede demostrar que la cantidad de líquido no ha variado, para lo cual recurre a la posibilidad de revertir la acción del trasvasamiento. Bastaría que se restituyera el líquido al recipiente original para constatar que la cantidad es la misma. Esta forma de razonamiento es claramente operativa. El razonamiento se ha desligado de la percepción.

Dos formas de conocimiento

Distingamos dos formas de conocimiento:

i) conocimientos construidos mediante la experiencia física *en todas sus formas*

ii) conocimientos lógico-matemáticos.

Hay que recalcar que los conocimientos construidos mediante la experiencia física no son copias de objetos materiales o de eventos externos al sujeto. Siempre son (re)construcciones que el sujeto hace a partir de la asimilación del objeto o del evento, a sus esquemas conceptuales. Cuando el sujeto percibe un objeto, éste adquiere la categoría de *observable* una vez que el sujeto lo interpreta desde su sistema conceptual. Un actor profesional puede darse cuenta, mientras asiste a una puesta en escena, que la actuación del protagonista es mala, aunque esto no sea claro para los espectadores debido a los *trucos* del protagonista, que disimula su falta de calidad histriónica. Es decir, para ellos, la mala actuación no es un observable, aunque estén presenciando la puesta en escena. Una persona sin la preparación profesional necesaria, no distingue entre el virus del sida y la bacteria del cólera. Estos ejemplos y los diversos que el lector es capaz de imaginar, señalan algo importante: toda observación que hacemos pasa por el filtro de una interpretación. Como ha dicho Hanson (Hanson, N.R, 1977, p.13):

> *toda observación está cargada de teoría*

Los observables pues, son observaciones interpretadas. Por ello, en ausencia de un marco asimilador (piénsese en la situación del observador y el microscopio), el sujeto no atribuye una significación al dato perceptual que permanece entonces al nivel de registro sensorial sin mayores consecuencias cognitivas. Son pues los observables que se producen mediante la experiencia física del sujeto, lo primero que resulta de interés para la elaboración del conocimiento físico. Una vez que estos observables son susceptibles de incorporación a una teoría, entonces se transforman en *hechos* de esa teoría.

Un dato físico aislado, sin interpretación, es un buen ejemplo de situación caótica. Sólo la actividad cognitiva del sujeto lo torna inteligible, al transformarlo en un observable. Por aquí empieza *la construcción de la realidad*, entendida como resultado de la actividad cognitiva del sujeto, que progresivamente coordina sus puntos de vista, vinculados siempre, eso sí, al mundo de sus experiencias. A este respecto:

> *...En términos de inteligencia reflexiva, la deducción se organiza y aplica a una experiencia concebida como exterior. De ahí que el universo se constituya en un conjunto de objetos permanentes vinculados por relaciones causales...situados en un espacio y tiempo...la perspectiva del sujeto sobre el universo se transforma radicalmente: del egocentrismo integral a la objetividad, tal es la ley de su evolución. (Piaget, 1995, pp. 327)*

Cuando hablamos de actividad lógico-matemática, no nos estamos refiriendo exclusivamente a la actividad dentro de las disciplinas altamente organizadas como el álgebra o la lógica proposicional. Nos estamos refiriendo, de manera amplia, al razonamiento del sujeto cuando, por ejemplo, dice que la cantidad de líquido permanece igual —a pesar de las apariencias contrarias— al trasvasarlo de un recipiente de determinada forma a otro de una forma totalmente distinta. Lo que el sujeto pone en juego en tal situación es una estructura lógica, al margen del grado de formalización que podamos atribuirle. Análogamente, cuando el sujeto de cierta edad (cognitiva) dice que no hay el número más grande porque dado ese número él podría construir otro más grande sumándole un uno, está razonando matemáticamente. Las estructuras lógico-matemáticas son pues aquellas que el sujeto posee como resultado de la interiorización de sus acciones y de la coordinación de las mismas.

Se pasa de la lógica de la acción (dar un rodeo para evitar un obstáculo, a la edad de tres años, por ejemplo, es poner en marcha la lógica de la acción) a la lógica de las operaciones pues, las operaciones son, al final de cuentas, resultado de la interiorización de las acciones. De allí que resulte delicado desvincular los problemas de hecho, de los de validación formal. Sin embargo el nivel de las operaciones es solidario del nivel de las acciones, en el sentido que el de las acciones queda subsumido en el de las operaciones. Aquí aparece una de las características básicas de los procesos de estructuración: cada nivel queda subsumido en el siguiente donde se produce una *re-semantización* del nivel anterior. Nos quedaremos aquí, a las orillas de un tema fascinante: las relaciones entre los niveles biológico y cognitivo. En cuanto al acuerdo entre las estructuras lógico-matemáticas y la experiencia, aparte de la actividad estructurante del sujeto que (re)define el mundo a partir de sus experiencias, habrá que tomar en cuenta que su pensamiento depende en cierto grado de los recursos del organismo —por ejemplo, de la estructura de sus sentidos que le suministran cierta "materia prima" y no otra. Un pregunta que se impone (véase la siguiente sección) es:

> *¿Qué significa la objetividad cuando hemos redefinido al objeto?*

En la medida en que el sujeto actúe sobre un determinado objeto, aumentará el grado de objetividad de sus conocimientos sobre dicho objeto pues ese grado no puede *medirse* sino de acuerdo a la forma endógena de conocimiento producido. La objetividad es la del conocimiento endógeno. Pensemos que es la actividad del sujeto la que organiza, estructura el conocimiento.

El universo lógico-matemático no sustituye al universo físico, sino que éste queda sumergido en aquél, y así puede ser mejor explicado.

Sobre el realismo y la realidad

Las epistemologías clásicas fundadas sobre el apriorismo o sobre el empirismo, son realistas. Es decir, suponen la existencia de una realidad exterior al sujeto cognoscente que, de alguna manera, *atesora* el conocimiento al que el sujeto puede acceder a través de su interacción con ella. La epistemología genética nunca ha negado la existencia de un mundo exterior al sujeto epistémico; sólo que concibe al conocimiento como resultado de los procesos fundamentales de asimilación y acomodación. El resultado es, en cada caso, una estructura cognitiva. El mundo al que se enfrenta el sujeto es el mundo de sus experiencias. De allí que no se pueda decir que el incremento de organización interna de las estructuras cognitivas *acerque* al sujeto a la verdadera estructura del mundo exterior sino que lo dota de un conocimiento cada vez mas viable (es decir, más adecuado) que resulta de organizar el mundo de sus experiencias. Cuando un sujeto está involucrado en una actividad cognitiva, puede o no tener éxito en sus objetivos. Es entonces allí, en el terreno de *la reflexión sobre sus acciones*, en donde tiene sentido hablar de *verdadero* o *falso.* Nunca a partir de una supuesta correspondencia del conocimiento con el mundo exterior al sujeto epistémico. Así surge la noción de realidad y objetividad: son nociones que se van generando mediante la actividad del sujeto epistémico. En efecto (Ferreiro, E. y García, R. 1978, p.17):

> *La objetividad no está garantizada en el punto de partida, no coincide con el registro perceptivo directo puesto que no hay registro pasivo de los hechos, y mal podría coincidir con un apartamiento del sujeto. En la concepción epistemológica sustentada por Piaget, un incremento de objetividad será dependiente de un incremento de actividad por parte del sujeto...en ningún nivel del conocimiento empírico hay una frontera delimitable entre las propiedades del objeto asimilado y las estructuras del sujeto asimilador. Para conocer, el sujeto debe poseer ciertas estructuras asimiladoras que funcionan como órganos del conocimiento... pero esas estructuras asimiladoras no preexisten a la acción sino que se constituyen en virtud de los requerimientos de la acción.*

En el lenguaje cotidiano se presenta una fuerte tendencia a la sustantivación. Por ejemplo, si una bailarina se mueve cadenciosamente, decimos que *sus movimientos* son cadenciosos. Es decir posee movimientos acompasados. Si a una persona le duele la cabeza, diremos que *tiene un dolor de cabeza*. En lugar de *mover* usamos *movimientos*; en lugar de *doler* usamos *dolor*. Esta tendencia a sustantivar, a crear cosas, seguramente es causa del realismo de las epistemologías clásicas. Quizá de aquí pueda surgir una estrategia para entender la epistemología genética. Se trataría de recuperar los verbos: en lugar de conocimiento objetivo, mejor hablemos de *objetivar*; en lugar de conocimiento, mejor hablemos de *conocer*; en lugar de realidad, mejor hablar de *realizar*; en lugar de *verdad*, mejor hablemos de *verificar*, etc. todos estos verbos son acciones (cognitivas) que realiza el sujeto cognoscente. Por eso decíamos que un incremento de actividad del sujeto comporta un incremento de objetividad: en este caso, la actividad del sujeto se confunde con objetivar.

Nota sobre la equilibración de las estructuras cognitivas

El desarrollo cognitivo consiste en una organización progresiva de las estructuras cognitivas. Un mayor grado de organización de una estructura cognitiva implica un mayor equilibrio de la misma. El equilibrio se refiere al estado en el cual las estructuras cognitivas de un sujeto han dado y continúan dando los resultados esperados, sin que salgan a la superficie ningún tipo de conflictos conceptuales. Por ejemplo, ante una perturbación causada por un objeto o un evento que trata de ser asimilado por un esquema, éste se acomoda generando una mejor discriminación de los objetos o eventos *admisibles* para el esquema o bien modificando drásticamente el esquema hasta el punto de producir un nuevo esquema. Diremos que la conquista de este nuevo nivel de equilibrio es un cambio cognitivo que identificamos con el *aprendizaje*. A nivel sensoriomotor (todos tenemos un nivel de funcionamiento sensoriomotor!) los esquemas de acción son cruciales para alcanzar nuestras metas dentro del mundo de nuestras experiencias. A nivel reflexivo, los esquemas operatorios son centrales para el logro de una red conceptual coherente. Los esquemas tanto de acción como operatorios, que resultan *viables* (es decir que producen resultados adecuados de acuerdo a los propósitos del sujeto) se retienen a título de orientadores de la acción. Refraseando una de las citas ya presentadas, el sujeto se adapta al mundo de sus experiencias mediante la adaptación de sus esquemas cognitivos.

En el estudio del desarrollo cognitivo, es decir, en el incremento de organización interna, la noción de esquema es central. Si decidiéramos adoptar una metáfora computacional, diríamos que un esquema es como una sub-rutina o como un programa.

Sobre la abstracción

La abstracción se entiende comúnmente como un acto de extracción (o de separación) de una característica de un objeto. Por ejemplo, podemos abstraer de los cuerpos la noción de peso. La idea de color, de hecho, es resultado de una abstracción. La idea de *forma* de los cuerpos también es una abstracción. Así, la circunferencia, el triángulo, el cuadrado, son resultado de abstracciones. A esta forma de abstracción, en donde la noción abstraída se extrae directamente de los objetos (que siempre son objetos conceptuales), Piaget la denomina *abstracción empírica*.

El proceso mental de abstracción puede ser consciente o inconsciente. De hecho la mayoría de las veces es inconsciente. Por ejemplo, al ver un mango, de inmediato lo reconocemos. No importa si es de manila, ataúlfo o de cualquier otro tipo, *sabemos* que es un mango. ¿Qué es lo que reconocemos, más allá de las diferencias obvias en forma, color y tamaño? cuando se hace esta pregunta a una persona, normalmente se queda perpleja, pues sabe que lo que ve es un mango, pero no sabe por qué lo reconoce (y sin embargo, le parece obvio que lo que ve es un mango). No es consciente del proceso de abstracción necesario para haber llegado a la noción de mango. Desde luego, esto mismo se puede decir de casi cualquier otra categoría; algunas incluso, las hemos formado a edad muy temprana.

Sobre la re–presentación

Hemos insistido en las páginas anteriores, que el conocimiento no es una representación del objeto (de conocimiento). Es decir, no es una copia de un supuesto modelo, como la que haría un pintor cuando tiene delante de sí un paisaje que trata de llevar al lienzo. Entonces, la representación, como copia, no tiene cabida en la epistemología genética. Veamos ahora el término *re–presentación*. Cuando vamos al teatro, por ejemplo, vemos una re–presentación de una obra. Lo que hace una actriz o un actor es re–presentar un papel. Es fundamental entender que en una re–presentación hay un elemento de construcción del sujeto. Tal construcción está presente tanto en el agente de la re–presentación (la actriz, el actor) como en aquello que es re–presentado (que es algo construido por otro sujeto). En epistemología genética al término *representación* siempre debe dársele el significado de re-presentación.

La capacidad de representación tiene su fundamento en la existencia de la función semiótica o simbólica. En determinado momento del desarrollo cognitivo, el sujeto puede re–presentar sus acciones hechas sobre objetos materiales, mediante esquemas mentales. Estos esquemas mentales *actúan* o mejor, operan, sobre las representaciones mentales de los objetos materiales. Es decir, tanto los objetos como las acciones sobre ellos son susceptibles de ser representados mentalmente. Como sabemos, esto es fundamental para la construcción de los esquemas y estructuras cognitivos. Pero la capacidad semiótica del sujeto le permite otras formas de representación. Por ejemplo, cuando recuerdo un rostro, lo estoy representando (recuerde: en el sentido de re–presentar). Es como si recordar fuera equivalente a ejecutar un programa que tenemos almacenado. Pero también puedo dibujarlo. El dibujo es otra forma de representación. Es un registro gráfico.

Este es un tema muy importante; en particular en matemáticas. Puedo representar una circunferencia mediante un registro gráfico, un dibujo sobre el pizarrón, sobre una hoja. Puedo también representarlo mediante una ecuación (de la geometría analítica). Esta es una forma de representación simbólica.

Abstracción reflexiva

En contraste con la abstracción empírica, la *abstracción reflexiva,* es el mecanismo que nos sirve para formar abstracciones a partir, no de los objetos, sino de las acciones que realizamos sobre tales objetos. Por ejemplo, si tenemos una colección de veinte objetos, sabemos que no importa la disposición geométrica que demos a esa colección, sobre una mesa, siempre habrá veinte objetos. Ese saber (i.e.: que no varía el número de objetos) es distinto a saber que un determinado objeto tiene forma rectangular. Es un saber extraído de la coordinación de nuestras acciones sobre esos veinte objetos. No es un conocimiento sobre los objetos mismos. De allí el nombre *reflexiva* que se da a esta forma de abstracción pues resulta de *reflexionar* sobre nuestras acciones. Atención: el término *reflexiva* de esta forma de abstracción, tiene una connotación adicional. En nuestro ejemplo, se trata de que primero *reflejamos* (proyectamos) nuestra acción (contar) sobre el plano de las operaciones. Es allí, en el plano de la representación de las acciones, donde *descubrimos* que el número de objetos es independiente de la ubicación sobre la mesa. En promedio, un niño de ocho años ya sabe esto. Cuando le preguntamos a un adolescente si el número de objetos cambia al modificar su disposición geométrica, hasta se sorprende de que le hagamos la pregunta. Para él ya resulta obvio, *necesario,* que sea así. No es consciente de que ha realizado, tiempo atrás, una abstracción reflexiva.

Es necesario detenernos un poco en el término *reflexión*. Por una parte se refiere a un acto mental. Como meditar, considerar. Por otra, se refiere a la reflexión, por ejemplo de la luz, sobre una superficie. Ambas acepciones entran en la definición de abstracción reflexiva. Cuando decimos que una acción *se refleja* sobre el plano de las operaciones (como en el ejemplo sobre la invariancia del número de objetos), también podríamos decir, que la acción *se proyecta* sobre el plano de las operaciones.

Los individuos construyen conceptos y con ellos estructuras conceptuales; luego re-estructuran éstas para formar esquemas más potentes. Tal es el proceso de organización creciente del sistema cognitivo. En él, la abstracción reflexiva juega un papel central.

Observaciones sobre la educación matemática

Las ideas que se van a presentar se han ido elaborando a partir del trabajo con profesores y estudiantes de niveles superiores, y del estudio de artículos que tienen propósitos similares al nuestro. La epistemología genética tiene como uno de sus pilares una teoría constructivista del conocimiento. De lo argumentado en la primera parte de este trabajo, podemos extraer las siguientes afirmaciones:

a) el sujeto construye su conocimiento

b) conocer es una función adaptativa.

La adaptación se refiere tanto a las acciones sensoriomotoras como a las operaciones conceptuales que han probado ser viables (adecuadas, que producen los resultados deseados) dentro del mundo de experiencias del sujeto cognoscente. Las construcciones conceptuales se llevan a cabo para ampliar el mapa de los caminos viables en el mundo de las experiencias del sujeto. Nunca para obtener un conocimiento-copia del mundo óntico. La obra de la escuela piagetiana puede entenderse como un pronunciado esfuerzo para diseñar un modelo de construcción de conocimiento viable. (Glasersfeld, 1991).

Frente al desequilibrio, producido por una situación nueva que el sujeto no puede *asimilar* a sus estructuras cognitivas, él se ve forzado a modificar tales estructuras, para *acomodar* el nuevo contenido. El doble proceso de asimilación-acomodación de las estructuras cognitivas, está en el centro de la explicación de cómo el sujeto construye su mundo. La exploración del mundo que lo rodea es una fuente permanente de desequilibración de las estructuras cognitivas del sujeto. El constructivismo no estudia *la realidad* sino *la construcción de la realidad*. Desde luego, el sujeto cognoscente no es un Robinson Crusoe, aislado, organizándolo y clasificándolo todo. No, el sujeto cognoscente es un ser social y la fuente primordial de sus desequilibrios cognitivos (sobre todo, después de la infancia) es justamente su entorno social, cuando los medios y las estrategias del sujeto se tornan insuficientes al compararlos con los de los demás. De allí que la abstracción reflexiva puesta en marcha a partir de sus acciones, debe complementarse con la interpretación de la actividad de los demás. En su libro *Psicogénesis e Historia de la Ciencia, (p.228)* Piaget y García (1983) lo expresan de modo por demás elocuente:

> *...la acción, excepto al comienzo mismo del período sensorio-motriz, no tiene lugar solamente en función de impulsos internos...bien pronto en la experiencia del niño, las situaciones con las cuales se enfrenta son generadas por su entorno social...no se asimilan objetos "pu-*

ros". Se asimilan situaciones en las cuales los objetos desempeñan ciertos papeles y no otros. Cuando el sistema de comunicación del niño con su entorno social se hace más complejo y más rico, y particularmente cuando el lenguaje se convierte en el medio dominante, lo que podríamos llamar la experiencia directa de los objetos comienza a quedar subordinada, al sistema de significaciones que le otorga el medio social. El problema que aquí surge para la epistemología genética es explicar cómo queda la asimilación, en dichos casos, condicionada por el sistema social de significaciones, y en qué medida la interpretación de cada experiencia depende de ellas.

Desconstrucción y Reconstrucción

La institución escolar recoge como objetos de enseñanza, las *transposiciones* de objetos conceptuales creados en el dominio de la investigación matemática (Kang-Kilpatrick, 1992). Los objetos transpuestos ya no tienen la misma estructura ni la misma significación que los objetos originales: han sido sometidos a una reorganización para que puedan ser colocados dentro del discurso escolar. Esto nos enfrenta a lo que parecen dos formas diferentes de conocimiento: el que se construye dentro de la práctica de la investigación en el interior de la matemática, y el que se transforma en *conocimiento enseñable* como resultado de una transposición. Parece entonces, que el proceso de (re)-construcción del conocimiento por parte del estudiante, es decir, su proceso de aprendizaje, tiene como uno de sus propósitos *des-construir* el conocimiento transpuesto (el *enseñable)* para re-construir un significado más profundo del conocimiento que se pierde a causa de la transposición. Esta situación es de importancia decisiva puesto que el profesor debe analizar las construcciones que hacen sus estudiantes de la realidad matemática a partir de sus experiencias. La lectura de un texto matemático típico puede servir para ilustrar esta situación: por ejemplo, al leer la definición formal del concepto de función, los textos de cierto nivel (libros de cálculo, por ejemplo) suelen enfrentarnos a algo análogo a esto:

> *una función es una colección de pares ordenados de suerte que si dos pares tienen el mismo primer elemento, entonces tienen también el mismo segundo elemento.*

¿Qué puede hacer un estudiante con esta definición? algo que siempre debe hacerse al leer un texto de enseñanza escrito en un lenguaje más o menos formal: buscar ejemplos, tratar de asociarla a una tabla de valores, a una gráfica y a otras formas de representación, que son las que se usan cuando se trabaja con este concepto; relacionarla con otras ideas. El fin es *construirle un significado*. En otros términos, uno busca *hacer suyo* lo que fue presentado formalmente, mediante la reelaboración de un contexto en donde el tema bajo estudio sea familiar. La realidad construida por el estudiante debe ser *viable*, es decir, suficientemente adecuada para permitirle actuar de manera efectiva. La acción, desde luego, se refiere a *acción en el mundo de sus experiencias conceptuales*. Es importante aquí volver a llamar la atención sobre el hecho que todo este proceso de construcción de una realidad matemática, no se realiza aisladamente sino que el estudiante despliega una actividad interactiva que consiste en *coordinar sus puntos de vista* con los de los demás estudiantes y profesores. La entrada a un dominio consensual, le da a su conocimiento una mayor y *mejor* objetividad. Reiteremos: la interacción social es una de las principales fuentes de desequilibrio cognitivo y por ende, de aprendizaje. Pues el aprendizaje aparecerá allí donde haya re-equilibración de las estructuras cognitivas.

Hay razones profundas que conducen a la formalización de las estructuras conceptuales de la matemática, pero no podemos olvidar la transposición que está involucrada. La educación, al reconocer estos dos niveles de conocimiento con los que tiene que tratar, estará en condiciones de enunciar que *la construcción del significado es parte esencial del aprendizaje de la matemática*. Aquí es importante evitar la tentación dualista de pensar que todo lo produce el sujeto o que todo lo produce el medio: el resultado lo es de la interacción dialéctica entre las estructuras del sujeto y su medio, que aquél tratará siempre de organizar, de estructurar (mediante uno de sus instrumentos básicos: la abstracción reflexiva) para poderlo comprender: *la búsqueda de razones* funciona como motor de la cognición.

Historia y Cognición

El análisis histórico—crítico de las ideas matemáticas nos permite identificar en el proceso de elaboración de las ideas, ciertas *formas de concebir* que, eventualmente, se convierten en obstáculos para el desarrollo de tales ideas. Como la epistemología trata de las circunstancias que hacen posible el conocimiento, a tales obstáculos se les llama *obstáculos epistemológicos*. Un obstáculo epistemológico es pues una forma de conocimiento que se torna inadecuada (ie: ya no es viable) para una cierta tarea cognitiva. Los obstáculos no desaparecen cuando trasladamos las ideas matemáticas al discurso escolarizado. Allí, toman otras formas, por ejemplo, aparecen como *errores* que el estudiante comete reiteradamente. Aquellos errores que aparecen cuando el estudiante no puede resolver un problema, cuando no entiende un enunciado (siempre este no poder, no entender, es desde la perspectiva del profesor) son manifestación de que una determinada estructura cognitiva no puede ya asimilar una nueva situación que se le presenta. Es necesario entonces que el profesor cuente con *un modelo de cómo funciona cognitivamente el estudiante*, para que encuentre, en consecuencia, las situaciones propicias a las que, a través de su mediación, se enfrente el estudiante en busca de una asimilación y acomodación posibles. Una vez más: estas situaciones incluyen la coordinación de puntos de vista con sus pares, con el profesor, sobre una temática que se define como pertinente, a partir de normas sociales: las de la institución escolar.

Consideremos ahora un ejemplo, tomado de un trabajo que se propone explorar las ideas que los estudiantes tienen sobre *límites*. A estudiantes (que ya habían tomado un curso de cálculo) se les pidió que contestasen esta pregunta:

¿Es 0.9999... igual a o menor que 1?

Con notable frecuencia, se obtuvieron respuestas de los siguientes tipos:

> *igual a uno porque la diferencia es infinitamente pequeña;*
>
> *igual, porque en el infinito, están tan cerca que pueden considerarse como iguales;*
>
> *menor que uno, aunque la diferencia entre ellos es infinitamente pequeña;*
>
> *menor que uno, pero es lo más cercano que puede estarse de uno, sin que sea uno.*

Podemos concluir que en las respuestas de los estudiantes subyacen *elementos infinitesimales*, que son activados por la pregunta. Tomando en cuenta las tesis de la epistemología piagetiana en cuanto a la pertinencia de las comparaciones entre los desarrollos conceptuales del individuo y los desarrollos conceptuales histórico-colectivos, traigamos a escena el texto de 1696 sobre el cálculo diferencial, del Marqués de L'Hôpital. El texto tiene, como uno de sus principios organizadores el siguiente:

> *Una cantidad que crece o decrece por una cantidad infinitamente pequeña puede seguir siendo considerada como igual. Es decir, si a una cantidad (finita) le añadimos o le restamos una cantidad infinitesimal, la nueva cantidad puede ser sustituida por la cantidad original.*

Estamos obligados a modificar nuestra primera evaluación de las respuestas *incorrectas* de los estudiantes. En efecto, ellas reflejan la forma como operamos con una determinada noción de infinitamente pequeño y de infinitamente grande, en un contexto que podemos llamar *práctico*: desde tal perspectiva, no hay diferencia entre estos números. Como esta *forma de concebir* las cantidades infinitesimales funciona, entonces la adoptamos como la forma correcta. Cuando pasamos a otros contextos, incluso prácticos, ya no nos ofrece respuestas adecuadas. Aparecen disfuncionamientos en la estructura conceptual que hemos elaborado con aquella interpretación, la cual aparece ahora como un obstáculo para asimilar una nueva situación. Resulta plausible afirmar que los obstáculos en el proceso de aprendizaje son consustanciales a dicho proceso, ya que el aprendizaje es siempre contextual. Creemos que esto puede verse en la historia y también en el desarrollo individual.

La epistemología genética puede ofrecer una interpretación a estas cuestiones de los obstáculos a partir de la teoría de la equilibración de las estructuras cognitivas. Nos conduce además a reflexionar sobre un problema de mucha importancia: que las reglas de validación de una disciplina dependen del proceso de su formación histórica.

Lo anterior cobra mayor relevancia cuando lo ubicamos en el marco de las transposiciones, pues es allí donde es factible analizar la interacción de las formas consideradas obstáculos. El problema de la validación tiene importancia no sólo como problema epistemológico sino, además, como problema didáctico, pues no es posible seguir sosteniendo que la evaluación del alumno se haga *contra el discurso del profesor*, sino que ha de tener en cuenta las estructuras conceptuales que el estudiante vaya desarrollando.

Dominios de inteligibilidad locales

La historia de la matemática nos enseña que durante la evolución de una disciplina, se van formando núcleos conceptuales alrededor de los cuales se adelanta la actividad matemática. A tales núcleos les llamaremos *dominios de inteligibilidad locales* (agradezco al Profesor Gil Henriques esta denominación y una discusión esclarecedora sobre el contenido de esta sección). Veamos un ejemplo tomado del cálculo diferencial. Durante el siglo XVII, los problemas de máximos y mínimos se identificaron con problemas de trazado de tangentes en puntos especiales de una curva que venía dada mediante una expresión analítica. Este tipo de representación analítica permitió el ensanchamiento del universo de curvas a las que podía trazarse una tangente. Así, surge una organización local cuyos componentes son:

1. una curva representada mediante una ecuación
2. un campo operatorio que consiste esencialmente en *derivar* la ecuación y hacer igual a cero esta *derivada*.

La lectura de un texto de historia del Cálculo, por ejemplo, Edwards (1979) muestra que este es el tipo de herramienta matemática que utilizaba P. de Fermat. Este dominio local de inteligibilidad está anclado al contexto que proporciona la geometría analítica; generaliza el problema del trazado de tangentes mediante una nueva representación del objeto geométrico que va a ser manipulado: la curva. La exploración de la derivada en este dominio local, no requiere, en principio, que se tenga una definición formal del concepto que se está explorando. Mas bien, es a partir del dominio local como se va gestando el concepto. En el caso que estamos considerando, cuando se trata de trazar tangentes a curvas convexas el campo operatorio es suficiente; pero surge un problema cuando se trata de trazar una tangente en un punto de inflexión. Allí, el campo operatorio indica que la tangente es una recta que atraviesa a la curva; pero la concepción de recta tangente —por generalización de tangente a curvas convexas— se *opone* a aceptarla como tal.

Esta tensión entre el campo operatorio y la concepción de tangente se ve reforzada por la eventual independencia que el campo operatorio adquiere de la concepción de tangente que le acompaña en un principio. Entonces estamos obligados a modificar la concepción para que acomode situaciones nuevas. De esta manera la concepción original va adquiriendo un más alto nivel de organización, se va haciendo más abstracta, se va independizando del contexto del que surge y aparece un mayor grado de compatibilidad con el campo operatorio. Eventualmente, surge de esta actividad, lo que denominamos el concepto de derivada.

Es importante observar, que si bien las concepciones son estructuras cognitivas, el concepto producido desde ellas es un objeto formal, que pertenece mas bien al lenguaje matemático. Es una organización lógica, que captura mediante un proceso de interiorización las acciones que se realizan sobre las concepciones.

Cuando se parte del concepto formal, el estudiante, como ya lo hemos dicho, se enfrenta a la tarea de desconstruir la estructura lógica, para recuperar los significados contextuales y situaciones que dieron lugar a la construcción del concepto y a su *intencionalidad*. En esta tarea pone en juego su capacidad de análisis y de asimilación. Sería iluso pensar que los estudiantes, hablando en general, puedan realizar todas estas actividades por sí solos. Los procesos de aprendizaje y de enseñanza son distintos pero de ninguna manera podemos pretender que estén desvinculados. Es importante y necesaria la intervención del profesor. Un comentario final sobre estas cosas: las ideas que los estudiantes pusieron en juego para contestar sobre la comparación entre 0.99999... y 1 forman parte de sus concepciones sobre lo infinitesimal. Sus respuestas fueron dadas desde una estructura cognitiva de allí que no deberían ser evaluadas con criterios que sólo se adecúan a la estructura lógica, es decir, al concepto.

En esta discusión sobre dominios de inteligibilidad locales, concepciones y conceptos, hemos cruzado un puente que va de la historia a la enseñanza. La vinculación entre ellas es muy fuerte; ello queda reflejado en los mecanismos que permiten pasar de las concepciones a los conceptos tanto a nivel histórico como individual. De ninguna manera deberá esto interpretarse como una aseveración sobre la equivalencia entre el desarrollo del conocimiento del individuo y el desarrollo histórico del conocimiento en una comunidad. Lo que se dice, es que los mecanismos para pasar de un nivel de estructuración al siguiente, son análogos.

Por ejemplo, tanto a nivel individual como colectivo, los mecanismos de generalización y abstracción están presentes para pasar de las concepciones al concepto. La epistemología genética sostiene que esto es así en todos los casos. Para un análisis detenido sobre estas cuestiones *véase* el texto "Psicogénesis e Historia de la Ciencia" (Piaget y García, 1983).

Afirmamos que, para la didáctica de la matemática, la historia sirve como un fundamento sobre el que podemos basar nuestros juicios acerca de la naturaleza de nuestro conocimiento.

Para terminar, una conclusión cuya pertinencia creemos haber construido a lo largo del escrito: *no es posible aspirar a una epistemología con un alto grado de cientificidad, al margen de la lógica y de la psicología.*

Referencias

Edwards, C. H. *(1979) The Historical Development of the Calculus,* Springer-Verlag, New York.

Ferreiro, E, & García, R. (1978) *Presentación a la edición castellana de Piaget, J: Introducción a la Epistemología Genética*, Tomo I, Paidós, 2a. edición, Buenos Aires.

Glasersfeld, V. E. (1991). *Cognition, Construction of Knowledge, and Teaching,* History, Philosophy and Science Teaching, Mathews, M. (ed.), Ontario Institute Studies in Education, Canada.

Hanson, N. R. (1977). *Patrones de descubrimiento y Observación y Explicación*, Alianza Universidad, 177, España.

Kant, M. (1972). *Crítica de la Razón Pura,* Editorial Porrúa, México.

Kang, W. y Kilpatrick, J. (1992). *Didactic Transposition in Mathematics Textbooks*, For the Learning of Mathematics 12, (1), pp. 2-7.

Piaget, J. (1971), *Sabiduría e ilusiones de la filosofía,* neXos, Barcelona.

Piaget, J. & García, R. (1983) *Psicogénesis e Historia de la Ciencia,* Siglo XXI, México.

Piaget, J. (1970). *Genetic Epistemology*, Columbia Univ. Press, New York.

Piaget, J. (1995). *La Construcción de lo real en el niño,* editorial Grijalbo, México (original francés publicado en 1937).

Weierstrass: cien años después[4]

Luis Moreno Armella
CINVESTAV-IPN, México

Introducción

Cuando volvemos los ojos a la historia, es fácil concluir que el siglo XIX fue el siglo del rigor en el cálculo. Y desde esta perspectiva, las figuras de Cauchy (durante la primera mitad del siglo) y Weierstrass (segunda mitad) tienen ganado un lugar especial. Cauchy organizó todo el material producido por sus antecesores (entre quienes destaca la inmensa figura de Euler) e introdujo de manera general, una forma rigurosa y clara de *recuperar* muchos de los resultados (ahora teoremas) del cálculo. Por ejemplo, dio una definición clara de *sucesión convergente*, de *función continua*, de *integral de una función continua*, etc. (para mayores detalles véase Edwards, pp. 301-334). Quizá pueda compararse - teniendo cuidado que estamos hablando de épocas y concepciones matemáticas distintas - la figura de Cauchy a la figura de Euclides, este último como sistematizador del conocimiento geométrico y quien introdujo **la demostración** como el instrumento de validación por excelencia dentro de las matemáticas.

Después de Euclides, la geometría no volvió a ser la misma. Después de Cauchy, el cálculo tampoco. Gradualmente, toda esa intensa investigación sobre los procesos de derivación e integración fue abriendo paso a las investigaciones, no sobre una familia particular de funciones (por ejemplo, las series de potencias), sino sobre el concepto general de función. De allí que se diera nacimiento a resultados como **el teorema del valor intermedio** (Cauchy-Bolzano) para funciones continuas definidas en un intervalo. No puede dejar de mencionarse, en relación a este teorema, la contribución de Bolzano quien comprendió la dependencia del mismo, de una construcción rigurosa de los números reales (*véase* Bottazzini, pp.96-101). Sin embargo, por un accidente histórico que no podemos analizar en este escrito, su trabajo permaneció al margen de los desarrollos centrales de su tiempo.

Weierstrass murió en 1897 a la edad de 82 años. Dejó tras de sí un análisis matemático consolidado, que había vivido su época de oro conocida como **la aritmetización del análisis**. Aunque fue una figura protagónica, no vivió ni actuó solo. Gran parte de su obra y de su influencia, tomó cuerpo a través de sus discípulos y seguidores. Basta citar los

4 Artículo publicado en la revista Miscelánea Matemática (Sociedad Matemática Mexicana), Vol. 25, 1997, p.p. 11-27.

nombres de Heine, Cantor, Hölder, Mittag-Leffler y, desde luego, Sonia Kovalesky.

Los comienzos

Después de un brillante inicio como estudiante de secundaria, Weierstrass ingresó a la carrera de leyes, en la Universidad de Bonn. *Ingresar* no es quizá el término más apropiado, pues el joven Karl se dedicó a cualquier cosa excepto a las leyes. Hacia 1840 (había nacido en 1815) sin título universitario, comenzó su carrera como docente de secundaria. Dedicó a esta actividad su tiempo diurno, durante los próximos quince años. Decimos *diurno* porque las noches fueron casi siempre un encuentro secreto con Abel.

El año 1854, fue de asombro doble para el mundo matemático. Riemann (1826-1866) dio a conocer su trabajo sobre las series de Fourier. Allí, para beneficio de todos, está su trabajo sobre la integral (de Riemann, desde luego), en donde se despliegan condiciones necesarias y suficientes para su existencia. Cabe mencionar que el problema sobre los *conjuntos de unicidad* de series de Fourier, partieron de este trabajo, así como el interés de Cantor en ellos, que por un camino complejo y lleno de dramatismos, lo conduciría a los conjuntos infinitos. En ese año, 1854, decimos, el otro motivo de asombro provino de Weierstrass. Consistió en su primera publicación en el famoso **Journal de Crelle** sobre las funciones abelianas. Una obra maestra que lo llevó hasta la Universidad de Berlín en donde permanecería el resto de sus días. Este trabajo le llevó a la reconstrucción del análisis complejo.

Nosotros aquí vamos a dedicar unas páginas a su trabajo sobre la fundamentación del análisis real.

Sobre el rigor

El rigor matemático es profundamente histórico. Ha evolucionado con las matemáticas; en tal proceso no es difícil ver que las exigencias corresponden siempre a una concepción de los objetos matemáticos involucrados. En un tiempo (para Gauss mismo, incluso) los matemáticos estuvieron satisfechos con el enunciado, a secas, del teorema del valor intermedio: *Una función continua que cambia de signo en un intervalo, deberá tener una raíz en dicho intervalo*.

Seguramente más de un lector se sentirá incómodo con el enunciado anterior. Habrá notado que le falta precisión. Esta reacción no es extraña. Forma parte del *medio ambiente de rigor* que adquirimos durante nuestra educación.

Comparemos las siguientes definiciones de **función continua**:

1. $f(x)$ se dirá continua si los valores numéricos de las diferencias $f(x + \alpha) - f(x)$ decrecen indefinidamente cuando decrece indefinidamente el incremento α

2. Diremos que una cantidad y es una función continua en x_0 si, una vez que hayamos elegido $\varepsilon > 0$, podemos demostrar que existe $\delta > 0$ tal que, para cualquier valor entre $x_0 - \delta$ y, $x_0 + \delta$ el valor correspondiente de y está entre $y_0 - \varepsilon$ y $y_0 + \varepsilon$.

La primera la podemos hallar en el Curso de Análisis de Cauchy de 1821. La segunda es de Weierstrass (1874). Podemos apreciar que hay diferencias entre ellas y también con la forma en que hoy en día, enunciamos la definición de función continua.

La sistematización debida a Cauchy supone dado el continuo numérico. De allí que, una vez introducida la noción de sucesión, no pueda distinguirse entre sucesión convergente y lo que hoy conocemos como sucesión de Cauchy. Esto es algo evidente en su **demostración** del teorema del valor intermedio. (véase Edwards, p. 308). Weierstrass fue capaz de comprender (como Bolzano, antes que él) que el esclarecimiento conceptual de este teorema (y de muchos otros), sólo sería posible mediante una construcción rigurosa de los números reales. Dió una demostración basada en lo que hoy en día conocemos como el teorema de Bolzano-Weierstrass (1874): *Toda sucesión acotada tiene un punto de acumulación.*

Además del teorema del valor intermedio, Weierstrass demostró, mediante argumentos puramente analíticos (ie: sin tomar en cuenta la evidencia geométrica) que *una función continua definida en un intervalo cerrado, tiene un máximo y un mínimo absolutos*.

Este resultado aparece en las conferencias de Weierstrass de 1861 bajo el nombre **Hauptlehrsatz,** esto es, Teorema Principal. De él dijo Hilbert en 1897, que era una *herramienta indispensable para investigaciones analíticas más refinadas* (véase Hairer-Wanner, p. 205).

Todo el programa de inyección de rigor en la estructura del análisis matemático, es lo que se conoce como **Aritmetización del Análisis.** Sin duda, su propósito central fue confinar el razonamiento matemático al ámbito numérico, señalando de paso, los peligros de una dependencia acrítica de la intuición geométrica.

De lo puntual a lo uniforme

En sus **lecciones de análisis** (1821) Cauchy enunció y **demostró** el siguiente resultado:

Si f_n: $E \rightarrow R$ es una sucesión de funciones continuas tal que para cada x de E, la sucesión $f_n(x)$ es convergente, entonces la función f:$E \rightarrow R$ definida como $f(x) = \lim f_n(x)$ para cada $x \in E$, es continua.

Hoy en día sabemos que, con **nuestras interpretaciones**, el resultado es falso. Por ejemplo, basta tomar la sucesión de funciones $f_n(x) = x^n$, $E = [0, 1]$. La función límite, f, es: $f(x) = 0$ si $x \neq 1$ y $f(1) = 1$, que no es continua en $x = 1$, aún cuando cada f_n lo es.

¿Cómo pudo Cauchy cometer un error de ese tamaño?

La única respuesta posible, nos parece, es que a su imagen conceptual de función continua le atribuía propiedades que no aparecían explícitamente en su definición. Algo similar ocurre en los Elementos de Euclides. Allí, Euclides toma como evidente que existen los puntos de intersección de dos circunferencias. En tratados modernos, muchas veces podemos leer que *hay allí, en Euclides, una falta de rigor*, como si el rigor fuese siempre el mismo. No es el caso. Desde luego, el análisis conceptual va generando un progreso en el sentido que la red de significaciones, la articulación conceptual, las dependencias causales de unos resultados con relación a otros, se van haciendo más claras. Weierstrass lo entendió así. En lugar de afirmar, como lo hizo Abel, que *el teorema admite excepciones* (Abel, 1826, Oeuvres 1, págs. 224-225), introdujo en 1841 el concepto de **convergencia uniforme:**

> La sucesión de funciones f_n definidas sobre A converge uniformemente a la función f, (definida sobre A) si para cada $\in > 0$ existe un número natural N

> tal que para cada $n \geq N$, y para cada x en A, $| f_n(x) - f(x) | < \in$.

Como bien se sabe, lo importante en esta definición es que el número N **sólo depende de $\in$ y no de x.** De allí, el apelativo *uniforme* para este concepto de convergencia.

En sus conferencias de 1861 (véase Hairer-Wanner, pág. 213) puede leerse el resultado de Weierstrass:

> Si (f_n) **converge uniformemente a f, y cada f_n es continua, entonces f es continua**.

Desde el punto de vista clásico, esto salda la deuda de Cauchy.

Cuando se introduce un concepto como la convergencia uniforme (o cualquier otro destinado a jugar un papel central en la teoría) resulta conveniente tener otros criterios equivalentes (teoremas de caracterización, decimos hoy en día) a través de los cuales podamos establecer que nos encontramos en condiciones de usar el concepto en cuestión. Weierstrass, desde luego, comprendía esto perfectamente, así que dió lugar al siguiente criterio, con miras a su utilización en el terreno de las series de potencias.

> Si para cada x en A, f_n está acotada (globalmente) por la constante C_n y si $\sum C_n$ es una serie convergente, entonces, la serie de funciones $\sum f_n$ converge uniformemente sobre A.

En particular, si cada f_n es continua sobre A, la función límite que define la serie $\sum f_n$ es continua sobre A. Este resultado se conoce como el *C-criterio de Weierstrass* para la convergencia uniforme. Un poco más adelante haremos uso de este resultado.

Derivabilidad y su ausencia

Cuando la imagen dominante de una función es su gráfica, una conclusión natural es que tal función es derivable excepto quizá, en algunos puntos especiales donde la gráfica tiene *picos (*como el que presenta la función valor absoluto en el origen). Esta imagen de función se fue sedimentando debajo del enunciado más algebraico que definía una función como una expresión analítica. De allí que los matemáticos, desde mucho antes de Weierstrass, intentaran demostrar que una función continua (es decir, aquella cuya gráfica *tiene una sola pieza*) debía ser derivable salvo quizá en algunos puntos. Este propósito puede hallarse ya en la reformulación de los fundamentos del cálculo propuesto por Lagrange (1736-1813) en su obra **Teoría de Funciones Analíticas**. (*véase* Hawkins, págs. 43-54).

Más adelante, Ampère (1806) intentó otra demostración pero sin recurrir a los argumentos de analiticidad de Lagrange. La lista de intentos es larga; ya para tiempos de Weierstrass, su discípulo Hankel (1870) había demostrado que si g es continua sobre $[-1,1]$ pero $g'(0)$ (la derivada de g en 0) no existe, entonces la función:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g(\operatorname{sen} npx) / n^k \; (k > 2)$$

es continua pero NO derivable en los racionales.

Este ejemplo y otros similares entre los que se cuentan los de H. Schwarz, también discípulo de Weierstrass, y otro tardío de Darboux (1879), contribuyeron a la toma de conciencia sobre el grado de generalidad que había alcanzado el concepto de función.

Francamente, era insuficiente seguir pensando en una función a través de su representación geométrica.

No podemos dejar de mencionar el ejemplo de Riemann (1861):

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sen(n^2 x)}{n^2}$$

Debido a la convergencia uniforme de la serie, la función *f* es continua sobre los reales. Riemann pensó que esta función en ningún punto era derivable. Pero estaba *ligeramente equivocado* como demostró Gerver en 1970 (véase Hairer-Wanner pág. 262) ya que en $x = \pi$ y otros valores excepcionales (múltiplos irracionales de π) la función es derivable.

Hacia 1872 Weierstrass escribía:

> *Hasta hace muy poco se creía que una función continua siempre tenía una primera derivada cuyo valor podía ser infinito o indefinido sólo en algunos puntos aislados. Aún en el trabajo de Gauss, Cauchy, Dirichlet, matemáticos acostumbrados a la crítica severa, no puede hallarse, de acuerdo a lo que sé, una opinión distinta. (loc. cit. pág. 261).*

Ese mismo año, Weierstrass dio a conocer, en su seminario, el siguiente resultado:

Si $b < 1$ y $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$, entonces, la función $g(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b^n \cos(a^n x)$ es continua para todo x y en ninguno de su valores es derivable.

El resultado fue publicado en 1875 como parte de un artículo de du Bois-Reymond, con el debido crédito al maestro.

Los efectos causados por la existencia de esta clase especial de funciones (continuas sin derivada en punto alguno) fueron considerables. En primer lugar, la continuidad de una función no siempre representaba **una propiedad de su gráfica** pues estos ejemplos **no son graficables** ya que continuidad-sin derivabilidad quería decir que la gráfica de la función *¡tiene un pico en cada punto!*

La continuidad se transformaba, entonces, en una propiedad descrita y verificada, cuando fuese necesario, en términos numéricos. Un análisis aritmetizado era el nuevo espacio de trabajo. Nos parece que esta es una consecuencia muy profunda del trabajo de la escuela weierstrassiana. Y este es, justamente, el segundo efecto de su trabajo: haber establecido en una nueva disciplina, una metodología de la cual, los nuevos parámetros de rigor, hacían parte medular.

Todo el último tercio del siglo XIX estuvo bajo el influjo de esta visión. El nuevo siglo se inició con trabajos que sólo hacían creer en un futuro lleno de optimismo. Basta citar la tesis *Longitud, área y volumen* de H. Lebesgue, dedicado a **la teoría de la medida y de la integración**, una de las más bellas creaciones matemáticas de este siglo. Aunque el rigor introducido a las matemáticas ha seguido evolucionando con muy buena salud, y no parece haber razones para que la situación a este respecto cambie, ya a comienzos del siglo se escuchaban voces críticas que veían con cierta inquietud la *desaparición del análisis geométrico.*

En efecto, aunque la aritmetización dio una fundamentación sólida al análisis matemático, la comprensión intuitiva suministrada por la geometría seguía haciendo falta. Al menos psicológicamente (y esto no es un problema menor) para los estudiantes recién llegados al campo. No eran fáciles de aceptar objetos como las funciones continuas sin derivada.

Es muy probable que la situación se haya tornado aún más ardua, para los estudiosos del análisis, cuando fueron testigos de la irrupción de otro resultado inesperado: la existencia de una función continua de la recta sobre el plano; es decir, de una ***curva* continua que llena un cuadrado.** Este resultado se debe a Peano (1890).

A continuación estudiaremos un ejemplo de función continua sin derivada, debido esencialmente a Van der Waerden (véase Billingsley 1982). Por varias razones preferimos el estudio de este ejemplo al original de Weierstrass (para su estudio remitimos al lector al artículo del Prof. Gravinsky en este mismo número). Nos parece que el ejemplo del maestro alemán es **deliberadamente analítico** para enfatizar el carácter aritmético que tanto le interesaba; era parte sustancial de su programa de restructuración del análisis. En cambio, el ejemplo que presentaremos, aunque necesariamente es muy analítico, abre (de nuevo) las puertas a consideraciones geométricas que van a quedar plenamente justificadas más adelante en el trabajo de von Koch.

Ejemplo Fundamental

Consideremos la función $\varphi(x)$ = distancia de x al entero más cercano. Su gráfica en el intervalo [0,1] se presenta en la figura 1:

En dicho intervalo, podemos representar la función así:

$$\varphi(x)=\begin{cases} x \text{ si } 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ 1-x \text{ si } \frac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases}$$

Es importante observar que la gráfica de la función tiene esta misma forma entre dos cualesquiera enteros consecutivos.

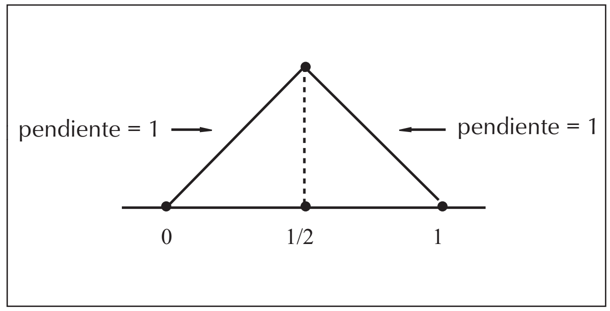


Figura 1

Ahora definimos una sucesión de funciones f_n así:

$$f_n(x)=\frac{\varphi(2^n \cdot x)}{2^n}$$

De esta manera, cada función f_n está *formada* por copias a escala de la función φ. La idea es ir produciendo una sucesión de funciones en donde cada una de las funciones tenga muchos picos. Al sumar todas estas funciones vamos a obtener una función continua sin derivada.

1. Definamos la función g:[0,1] $\to R$ así:

$$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

Como $f_n(x) \le \frac{1}{2^{n+1}}$ y la serie $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}=1$ entonces, el C-criterio de Weierstrass garantiza que la función g es continua.

2. Al considerar la función f_n tendremos mínimos absolutos en los valores $u = i2^{-n}$ donde $i = 0,1,2,\ldots,2^n$ (figura 2).

Si $k \ge n$ entonces $f_k(u) = 0$, $u = i2^{-n}$, pues $2^k u$ es un número natural. Recordemos que

$$\phi(2^k u) = 0$$

De manera que si $u = i \cdot 2^{-n}$, entonces,

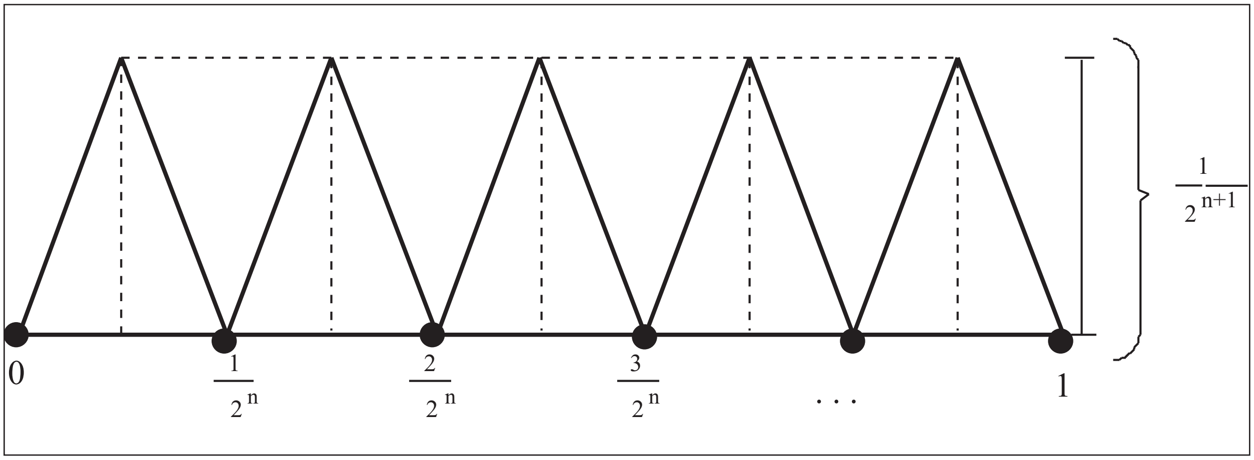


Figura 2

$$g(u) = f_0(u) + f_1(u) + f_2(u) + \cdots + f_{n-1}(u).$$

3. Veamos que la función g no es derivable. Es fácil ver que cualquier x en $[0,1]$ se encuentra en un intervalo cuyos extremos son de la forma: $u_n = i2^{-n}$ y $v_n = (i+1)2^{-n}$ para algún i, por lo tanto puede verse, tal x, como límite de las sucesiones u_n y v_n cuando $n \to \infty$. Para estudiar la posible derivabilidad de g en x, vamos a considerar los cocientes:

$$\frac{g(v_n) - g(u_n)}{v_n - u_n}$$

Por la observación hecha en (2), tendremos que:

$$\frac{g(v_n) - g(u_n)}{v_n - u_n} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f_k(v_n) - f_k(u_n)}{v_n - u_n}$$

Ahora, cada cociente

$$\frac{f_k(v_n) - f_k(u_n)}{v_n - u_n}$$

es 1 ó -1. Por lo tanto,

$$\frac{g(v_n) - g(u_n)}{v_n - u_n} = \pm 1 \pm 1 \pm 1 \cdots (n\, veces)$$

de modo que no existe el límite cuando $n \to \infty$. En conclusión g no es derivable en ningún punto.

Conviene recordar, para dar una mejor perspectiva a estos trabajos, el resultado de Lebesgue (*op. cit.*):

Si f es una función monótona, entonces f es derivable excepto sobre un conjunto de medida nula.

Quizá esto sea lo más próximo que se pueda estar del resultado tan buscado sobre la derivabilidad de una función continua.

Retorno a la Geometría

Suele ocurrir que, bajo la influencia de un modo de pensar poderoso, los científicos de una disciplina exageren las bondades o la interpretación de los nuevos enfoques. En cierto momento —comienzos del siglo XX— se empezó a escuchar la voz de una corriente que proponía equilibrar la excesiva aritmetización, con un enfoque más geométrico.

Una de estas voces fue la del matemático sueco Helge von Koch. Conviene citar en extenso su punto de vista:

> *Hasta antes de Weierstrass, era una creencia bastante común entre los miembros de la comunidad científica, que toda curva continua tiene una tangente bien determinada —excepto en algunos puntos singulares. Se sabe que ocasionalmente, los geómetras han tratado de establecer este resultado, sin duda apoyándose en la representación gráfica de las curvas. Aún cuando el ejemplo de Weierstrass ha corregido esta falsa concepción de una vez y para siempre, me parece que su ejemplo no es satisfactorio desde un punto de vista geométrico...la expresión analítica oculta la naturaleza geométrica de la curva correspondiente...y no se ve por qué carece de tangente.*

Luego continúa von Koch:

> *Por esta razón me he preguntado —y creo que esta cuestión es importante desde un punto de vista didáctico tanto para la geometría como para el análisis— si uno podría hallar una curva sin tangentes para la que los aspectos geométricos estén de acuerdo con todo el contexto. La curva que he encontrado y que es el objeto de este artículo, está definida mediante una construcción muy simple y creo, que cualquiera podrá ver intuitivamente la imposibilidad de la existencia de la tangente.*

Estas citas se pueden hallar en la introducción del artículo *Sobre curvas continuas sin tangentes, constructibles mediante la geometría elemental* que apareció en 1904. Se reproduce en el libro Classics on Fractals, de G. Edgar, 1993.

Para finalizar, vamos a estudiar el ejemplo de von Koch. Se parte de un segmento de longitud L y se divide en tres partes iguales. Se extrae la parte (segmento) central y se reemplaza por dos segmentos iguales al extraído, tal como queda ilustrado en la figura básica (figura 3).

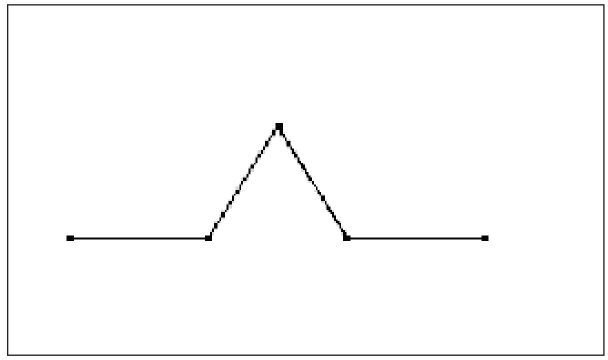


Figura 3

La segunda etapa de la construcción de la curva de von Koch consiste en colocar una copia de la figura básica (la del dibujo anterior) sobre cada uno de los segmentos de los que está compuesta esta figura básica. Como la figura original está compuesta de cuatro segmentos (de igual longitud) las cuatro copias que vamos a colocar serán modelos a escala (¿cuál es la escala?) de la figura original. El resultado está en la figura 4.

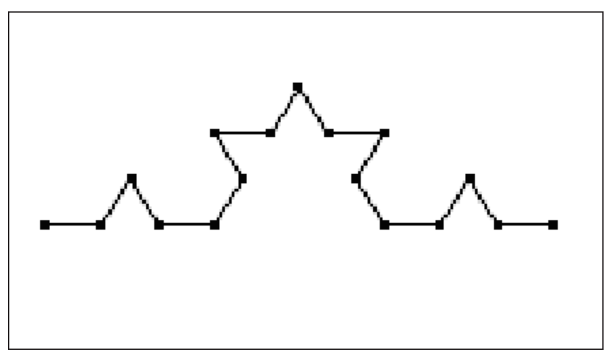


Figura 4

El procedimiento de ir colocando copias a escalas de la figura original se continúa indefinidamente. La figura que resulta como límite de este procedimiento, es la *curva* de Von Koch. Para tener una mejor idea de los resultados de las etapas de la construcción, mostremos la tercera etapa (figura 5):

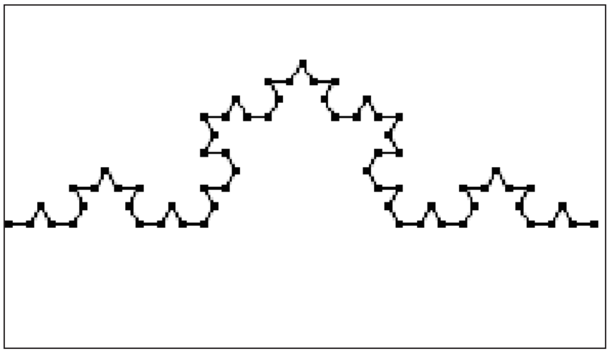


Figura 5

El lenguaje de programación Logo, nos permite construir de una manera relativamente sencilla, un programa para graficar cualquiera de las etapas. Las instrucciones básicas del lenguaje que serán empleadas son: Forward (abreviada Fd) que dada en la forma Fd : N, le indica a "la tortuga" (que es la forma usual del indicador del movimiento) que avance, en la dirección en la que está *mirando*, N pasos. La otra instrucción es Right (abreviada Rt) que dada en la forma Rt α le indica a la tortuga que gire a su derecha un ángulo de α grados. Para girar a la izquierda de la tortuga, se usa Left (abreviada Lt). Entonces, para dibujar la figura básica podemos usar el programa siguiente:

```
To Koch1 :L
Fd :L/3
Lt 60
Fd :L/3
Rt 120
Fd :L/3
Lt 60
Fd :L/3
End
```

La primera línea del programa To Koch1 :L se necesita para poner un nombre al mismo (que siempre empieza con *To*) y el parámetro :L (precedido de los dos puntos) indica que al momento de la ejecución deberá dársele un valor numérico. Por ejemplo, Koch 100 quiere decir que se dibujará la figura básica a partir de un segmento cuya longitud es 100 unidades. ¿Qué ocurre si, siguiendo nuestra descripción por etapas, quisiéramos dibujar la segunda etapa? Cada uno de los segmentos de longitud L/3 de la figura básica, debe ser reemplazado por una copia a escala de esa misma figura básica (a la que nos referiremos como Koch1). Cada una de las copias a escala que necesitamos, resulta de la ejecución del programa Koch1 :L/3. Entonces, el programa para graficar la segunda etapa, que llamaremos Koch2, es el siguiente:

```
To Koch2 :L
Koch1 :L/3
Lt 60
Koch1 :L/3
Rt 120
Koch1 :L/3
Lt 60
Koch1 :L/3
End
```

Para graficar la tercera etapa, que denotamos mediante Koch3, necesitamos haber construido el programa para graficar Koch2. Si partimos de un segmento inicial de longitud L, los cuatro segmentos que componen a la figura básica tienen, cada uno, longitud L/3. Ahora, sobre la figura correspondiente a Koch2, necesitamos colocar copias de la figura básica (llamada también *generador* de la curva de von Koch) en cada segmento de longitud L/9; por lo tanto serán copias del generador donde cada lado tiene longitud L/27. Este proceso puede continuarse hasta la etapa que se desee. De acuerdo a la descripción que acabamos de hacer, el programa correspondiente a Koch3 queda:

```
To Koch3 :L
Koch2 :L/3
Lt 60
Koch2 :L/3
Rt 120
Koch2 :L/3
Lt 60
Koch2 :L/3
End
```

Observando con cuidado los programas para graficar Koch1, Koch2 y Koch3, uno puede abstraer la forma general que tiene el programa para graficar KochN, para cualquier N, una vez que uno tiene el programa correspondiente a Koch (N-1). Este programa es:

```
To KochN :L
Koch (N-1) :(L-1)/3
Lt 60
Koch (N-1) :(L-1)/3
Rt 120
Koch (N-1) :(L-1)/3
Lt 60
Koch (N-1) :(L-1)/3
End
```

Obsérvese que para graficar Koch1, debemos tener, a su vez, lo que podríamos llamar Koch0, que se reduce a [Fd:L.]

Logo permite la construcción mediante la recursividad (que no es privativa de este lenguaje) de un programa que nos permite *de un golpe* graficar la etapa que se desee, pues en ese mismo programa estarán las instrucciones para graficar todas las etapas anteriores necesarias. Un procedimiento de esta naturaleza dependerá de dos parámetros: la longitud del segmento *inicializador,* L y el número natural correspondiente a la etapa (o *nivel*) que se quiera graficar. Tal programa (que ya debe resultar natural para el lector) es el siguiente:

```
TO KOCH :N :L
IF :N=0 [FD :L STOP]
KOCH :N-1 :L/3
LT 60
KOCH :N-1 :L/3
RT 120
KOCH :N-1 :L/3
LT 60
KOCH :N-1 :L/3
END
```

Comparando este programa con el correspondiente a KochN :L vemos dos diferencias. La primera es que en KOCH :N :L, aparecen dos parámetros y no uno como en KochN :L. El parámetro :L, indica siempre la longitud del segmento inicializador, a partir del cual haremos las construcciones de las etapas. El parámetro :N corresponde a la etapa que se quiere graficar. La otra diferencia entre ambos programas, KOCH :N :L y KochN :L, aparece en la primera línea de KOCH :N :L, que es IF :N=0 [FD :L STOP]. Esta línea permite resolver el caso N=0, que se reduce a trazar un segmento. *El efecto es el mismo que tiene la ejecución de* Koch0 :L. Vale la pena que el lector haga la descripción completa para el caso N=2 en el programa KOCH :N :L . Es una actividad que recomendamos, ya que le permitirá comprender mejor cómo funciona la recursividad.

En la pantalla de una computadora sólo podremos representar un número, más bien pequeño, de etapas del proceso debido a las limitaciones de la resolución de la pantalla[5].

En su momento, las funciones continuas sin derivada, las curvas continuas que llenan un cuadrado y muchos otros ejemplos, fueron considerados como *patológicos*. Todos hemos sabido de la expresión del gran matemático Hermite, quien decía que daba la espalda a *esa plaga de funciones que no tienen derivadas*. Este tipo de expresiones son reflejo de la ideología explícita e implícita que siempre está presente en el trabajo científico. Si el lector tuviese dudas sobre esta última afirmación, bastaría remitirlo a la historia de los conflictos padecidos por Cantor durante la elaboración de su teoría de los conjuntos infinitos.

Por su elocuencia y pertinencia, consideramos interesante en este momento traer una cita en extenso de Dyson (1978):

> *Una gran revolución en ideas separa la matemática clásica del siglo XIX, de la matemática del siglo XX. La matemática clásica tuvo sus raíces en las estructuras regulares de Euclides y en la dinámica continua de Newton. La matemática moderna comienza con la teoría de conjuntos de Cantor y con la curva de Peano, que llena un cuadrado (añadimos nosotros: y con la curva de Weierstrass, la de Von Koch, con la construcción geométrica, en manos de Hilbert de la curva analítica de Peano)... estas estructuras fueron vistas al comienzo como "patológicas"... más cercanas a la música atonal y a la pintura cubista...estos ejemplos fueron importantes para mostrar que el mundo de la matemática poseía una riqueza de posibilidades que iba más allá de las simples estructuras que podían verse en la naturaleza. La matemática del siglo XX se desarrolló en la creencia de que había trascendido los límites impuestos por sus orígenes naturales. Ahora como Mandelbrot nos muestra ejemplo tras ejemplo, la naturaleza ha hecho una broma a los matemáticos... las mismas estructuras patológicas inventadas para romper los nexos con la naturaleza, resulta ahora que son inherentes a la descripción de los objetos naturales que nos rodean.*

La situación descrita aquí es característica de las matemáticas: una permanente tensión entre lo concreto y lo abstracto. Lo que es abstracto en un nivel de desarrollo es concreto en un nivel posterior. Allí encuentra una explicación más profunda. Así, las *curvas patológicas* son actualmente los ejemplos primeros en la teoría de los objetos fractales. Weierstrass seguirá con nosotros.

Referencias

Billingsley, P., (1982). *Van der Waerden's continuous, nowhere differentiable function*. Am. Math. Monthly, Vol. 89 (9), p. 691.

Bottazzini, U., (1986). *The Higher Calculus: A History of Real and Complex Analysis from Euler to Weiestrass*. Springer-Verlag, New York.

Dyson, F. *Characterizing Irregularity*. Science, 200 (1978), 677—678.

Edgar, G. (1993). *Classics on Fractals*. Addison-Wesley.

5 Los siguientes niveles de la curva se construyen en forma recursiva, siguiendo el proceso explicado.

Edwards, C. (1979). *The Historical Development of Calculus*. Springer-Verlag, New York.

Hairer, E. y **Wanner, G**. (1996). *Analysis by its History*. Springer-Verlag, New York.

Hawkins, T. (1970). *Lebesgue Theory of Integration, its Origin and Developments*. Chelsea Publishings Editions, second edition.

La epistemología constructivista y la didáctica de las ciencias: ¿coincidencia o complementariedad?[6]

Luis E. Moreno Armella
Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV – IPN
Guillermina Waldegg
Sección de Metodología y Teoría de la Ciencia, CINVESTAV – IPN

Resumen

Una gran parte de las críticas a las epistemologías constructivistas, en particular a la teoría de Piaget, se han hecho desde dominios diferentes a la epistemología, principalmente desde la didáctica y la psicología. El propósito del presente trabajo es mostrar que la fuerza de la teoría piagetiana se debe buscar en sus contenidos epistemológicos y no, como se ha hecho tradicionalmente, en aplicaciones inválidas a la educación. Sin negar la filiación que la epistemología tiene con las aproximaciones didácticas, nuestra intención es tratar de delimitar sus respectivos dominios de aplicabilidad.

Abstract

To a large extent, criticisms to constructivists epistemologies in particular to Piaget´s theory, have come from fields like psychology and didactics, not from epistemology itself. Our goal is to show that the power of piagetian theory comes from its epistemological contents. One must not look for this power in education for its own sake. This does not mean that epistemology and educational theories are unrelated but that each one has to define its domain of applicability.

Introducción

Las investigaciones en didáctica que indagan sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de las ciencias han alcanzado en las últimas décadas niveles de consolidación considerables, lo que hace necesario caracterizar los marcos conceptuales que determinan nuestras explicaciones acerca de los fenómenos vinculados a la educación científica.

Los métodos de enseñanza, el diseño de estructuras curriculares, los textos y materiales didácticos y la práctica dentro del aula han estado —porque no puede ser de otra manera— inspirados en las concepciones científicas de los educadores. Si consideramos el dominio del paradigma empirista de la cien-

[6] Artículo publicado en Enseñanza de las Ciencias, 1998, vol. 16(3), p.p. 421-429 Barcelona.

cia en buena parte de nuestro siglo, no es extraño ver que las ciencias hayan sido tratadas en la escuela como un *cuerpo inalterable de conocimientos preexistentes*. Bajo este paradigma epistemológico, el papel del profesor y de quienes producen los planes de estudio, los textos y los materiales didácticos ha consistido en diseñar estrategias curriculares y didácticas, que faciliten a los estudiantes la *asimilación* del conocimiento *transmitido*. La concepción que subyace a esta actividad supone que existe una relación mecánica entre transmisión y asimilación.

Durante muchos años hemos aceptado una concepción educativa que no distingue entre *entrenamiento* y *enseñanza*. Hemos supuesto que el conocimiento es un bien que debe ser entregado al estudiante por medio de una práctica didáctica preestablecida; para ello se han sobrestimado actividades como la memorización, la repetición y la realización de tareas rutinarias. Sin embargo, ahora nos damos cuenta que *resolver problemas* en el sentido amplio, como lo establecen la mayoría de los propósitos explícitos de la educación científica en todos los países, exige del estudiante una comprensión que va más allá de este primer nivel. Para lograrlo, sabemos que el estudiante debe llevar a cabo otras actividades, distintas y más complejas, que incluyen no sólo una reflexión sobre sus operaciones, sino una *reflexión sobre su reflexión*. La forma de comprensión que resulta de esta actividad *metacognitiva* sabemos —o dicen los estudios realizados a este respecto— que no puede ser *transmitida,* en el sentido tradicional, al estudiante. Es algo que él tiene que construir con sus propios medios y que el profesor debe reconocer y propiciar.

La concepción mecanicista, que supone que al generarse un proceso de emisión de información por parte del profesor se activa automáticamente un proceso de asimilación de dicha información por parte del estudiante, tiene una vieja historia. Que las cosas no son así, es algo que se puede constatar mediante la presencia, en el campo de conocimientos del estudiante —a la hora del examen, por ejemplo—, de elementos que no estaban presentes en el discurso de enseñanza del profesor.

¿Cuáles son las alternativas a este estado de cosas? Responder a este interrogante es uno de los propósitos principales de los estudios sobre la enseñanza de las ciencias. Uno de los puntos de partida de estas indagaciones está en las ciencias mismas. Empero, el conocimiento científico, si bien es necesario, no es suficiente para la caracterización de una disciplina cuyo objeto de estudio es la enseñanza y el aprendizaje de la ciencia y no la ciencia misma. Una condición indispensable para tal caracterización la constituye la interacción continua con el sistema educativo y con los actores —alumnos y maestros— del proceso.

La alternativa constructivista en epistemología

Hemos insistido anteriormente, en que las concepciones sobre la ciencia que tiene el educador modelan y modulan sus prácticas pedagógicas. Estas concepciones son, con frecuencia implícitas y, por tanto, caen fuera de la esfera de los esfuerzos conscientes del profesor por identificar las posibles causas de los fracasos de sus alumnos. De allí que resulte importante la toma de conciencia, por parte del educador, de sus convicciones sobre la naturaleza del conocimiento científico, sobre cómo éste se genera, sobre las relaciones entre el conocimiento y la realidad y entre las distintas manifestaciones del saber científico, de modo que el educador pueda emplear, de manera explícita, estas ideas en el diseño de su acción pedagógica.

La epistemología, en su versión contemporánea, se propone el estudio de la naturaleza del conocimiento científico y de las circunstancias de su producción. Ya desde los tiempos de la antigüedad clásica griega era dominante el pensamiento epistemológico realista que concibe el conocimiento como una copia de la realidad: el conocimiento se considera el reflejo —como la imagen en un espejo- de ese mundo externo que existe con independencia del observador. El enfoque tradicional de la enseñanza tiene raíces profundas en esta epistemología realista [*véase* Moreno-Waldegg, 1992] que se complementa armónicamente con el paradigma empirista; bajo este punto de vista, la actividad del sujeto que trata de conocer (el sujeto cognoscente) queda subordinada al objeto de su conocimiento y su actividad –primordialmente perceptual– sólo puede producir un conocimiento que es reflejo fiel de una realidad externa estructurada.

Si bien esta concepción realista—empirista del conocimiento resulta ser una especie de *respuesta espontánea* del hombre común ante las preguntas sobre la naturaleza del conocimiento, no ha estado, desde sus primeras manifestaciones en la Grecia antigua, libre de cuestionamientos. En el siglo V a.C., los escépticos hicieron evidente la imposibilidad lógica de establecer la *verdad* de un conocimiento, ya que la necesaria comparación de ese conocimiento con la parte de la realidad que supuestamente representa, implica un nuevo acto de conocimiento, que tendría también que ponerse a prueba para demostrar su verdad. Esta sólo es la primera de una larga cadena de objeciones a las que se tuvieron que enfrentar quienes defendían el realismo y el empirismo epistemológico.

Reaccionando al punto de vista realista— empirista, Kant (1724-1804) postula en su *Crítica de la Razón Pura* que, cuando el sujeto entra en contacto con su objeto de conocimiento, recibe impresiones sensibles que somete a un proceso organizador, mediante estructuras cognitivas innatas. Lo que resulta es el conocimiento. Así como el líquido adopta la forma del recipiente que lo contiene, así también las impresiones sensoriales adoptan las formas que les son impuestas por las estructuras cognitivas que las procesan; el resultado de este procesamiento es el conocimiento. De esta manera, Kant nos advierte sobre las condiciones de posibilidad del conocimiento objetivo: para alcanzarlo se requiere de ciertas formas innatas de sensibilidad, estas son el espacio, el tiempo, la causalidad, la permanencia del objeto. En otros términos, aunque la realidad existe con independencia del sujeto, el conocimiento que éste puede tener de aquélla, está mediado por la capacidad cognoscitiva intrínseca del sujeto.

Hay dos consecuencias fundamentales del enfoque kantiano: la primera, el conocimiento deja de ser concebido como representación de la realidad externa y, en su lugar, es visto como resultado inseparable de las experiencias del sujeto y de su actividad cognoscitiva. La segunda, el sujeto deja de ser cognitivamente pasivo frente al objeto de su conocimiento. El sujeto da estructura a sus experiencias. Esto ya lo habían adelantado las corrientes racionalistas, pero al costo de irse al extremo de poner todo el peso de la construcción del conocimiento en el sujeto cognoscente, marginando al objeto. La posición kantiana inauguró un nuevo modo de conceptualizar la actividad cognoscitiva. Sobre ella trabajaría Piaget dos siglos más tarde.

Para Piaget el sujeto se acerca al objeto de conocimiento dotado de ciertas estructuras cognitivas previamente construidas (no innatas), mediante las cuales *asimila* al objeto de conocimiento. Esta asimilación activa una transformación (*acomodación*) de su aparato cognitivo, de modo que, en el siguiente acercamiento su *lectura* del objeto será otra, pues como resultado de la primera, las estructuras cognitivas del sujeto se han modificado. Con ello se establece una diferencia central con la posición de Kant: las estructuras cognitivas piagetianas son estructuras que se generan y evolucionan en el tiempo.

Las estructuras cognitivas del sujeto se van transformando. Con el paso del tiempo, el sujeto se va encontrando en posesión de un aparato cognitivo cada vez más adaptado a su entorno. Por ejemplo, la lógica de un niño pequeño es cualitativamente distinta a la lógica de un adulto; como consecuencia, la imagen del mundo del niño es distinta a la imagen del adulto; sin embargo, en ninguno de los dos casos, la imagen del mundo es una copia de una realidad que *esté allí*, estructurada, lista para ser asimilada. La dimensión constructivista de la epistemología piagetiana se refiere a que el sujeto va construyendo sus sucesivas versiones del mundo al mismo tiempo que construye sus propias estructuras cognitivas. Su conocimiento no es copia de una realidad externa a él, sino resultado de la estructuración de sus propias experiencias.

Una idea primordial que subyace a la obra de Piaget es la de *evolución*. A ella corresponde un punto de vista filosófico y científico que consiste en fijar nuestra atención en la naturaleza dinámica y cambiante de las cosas y estudiar entonces sus transformaciones a lo largo del tiempo. En esencia, este punto de vista, dominante ya a fines del siglo pasado, fue una consecuencia duradera de la obra de Darwin.

Una epistemología experimental

Piaget quiso que la epistemología estuviese dotada de mecanismos de control sobre sus afirmaciones. La historia de la ciencia (concebida como laboratorio epistemológico) y la psicología, le darían los elementos para diseñar el dominio experimental de su versión de esta disciplina.

El objetivo de la *epistemología genética* es la explicación del conocimiento científico; su base experimental la constituye la historia de la ciencia y ciertos experimentos psicológicos, que quedan enmarcados en la llamada *psicología genética*, desarrollada para tales fines por Piaget y su escuela ginebrina. Describiremos ahora las relaciones entre las tesis epistemológicas centrales de la teoría piagetiana y los *experimentos psicológicos* diseñados como parte del dominio empírico correspondiente, al tiempo que haremos algunas anotaciones desde la perspectiva educativa.

Piaget siempre estuvo bajo la fuerte influencia de la ciencia de su tiempo (esto ya es evidente en su artículo *Las Dos Direcciones del Pensamiento Científico* de 1929). Su epistemología está pensada alrededor de las categorías básicas de la ciencia: el espacio, el tiempo, la causalidad, el principio de conservación de la materia, el número, etc. Piaget realizó investigaciones decisivas sobre estas categorías, desde la perspectiva de la historia de las ideas, que lo llevaron a una explicación de la razón profunda de la existencia de un pensamiento racional.

Pero consideró necesario dar una mayor sustentación empírica a sus aseveraciones de orden epistemológico. Entonces, su *laboratorio epistemológico*, constituido por la historia de la ciencia, se vio ampliado con sus investigaciones psicogenéticas[7]. De allí extrae una información fundamental: *existe una lógica del niño, cualitativamente distinta a la lógica del adulto*. Este resultado está en el corazón de su teoría, pues le permitió explicar el origen operatorio de las estructuras lógicas (punto débil del empirismo) además de verificar una vieja hipótesis sobre la existencia de una *lógica de la acción* (la del niño pequeño) que sirve como punto de partida para la construcción de la lógica del pensamiento adulto. Para Piaget, el pensamiento es una acción que se lleva a cabo internamente; para su descripción requiere de un análogo interiorizado del movimiento y de la percepción. La función simbólica hace posible esta nueva forma de acción: se comienza con las representaciones simples del mundo sensoriomotor y de allí se llega a las operaciones concretas que se apoyan sobre aquellas primeras representaciones. El periodo de las operaciones concretas tiene como núcleo la posibilidad de aplicar, por parte del sujeto, algún principio de conservación. Debe entenderse que esto ocurre siempre dentro de un contexto y que el éxito en la aplicación de un principio de conservación en dicho contexto no significa que el sujeto ya pueda aplicar tal principio en cualquier otra situación. Lo que le interesa a la epistemología genética, como tal, es que la posibilidad de aplicar un principio de conservación revela un cambio cualitativo. En la etapa final del proceso (que es muy largo, complejo y altamente no-homogéneo) aparecen las formas complejas de organización del pensamiento científico. El núcleo de la etapa de las operaciones formales lo constituye *la posibilidad del pensamiento hipotético-deductivo*, es decir, la posibilidad de razonar a partir de hipótesis. Volvamos a insistir, la posibilidad significa que, *en una situación determinada*, el sujeto es capaz de esta forma compleja de razonamiento. Es allí, en esa posibilidad, donde se encuentra el valor epistemológico que interesa a la epistemología genética[8].

El análisis de la génesis histórica de las categorías básicas del pensamiento científico permitió a Piaget *la tematización* (es decir, el estudio sistematizado) de la objetivación y del aumento de claridad conceptual (que podemos asociar a un aumento de rigor) en el desarrollo de las ciencias. La actividad de la comunidad científica va llevando al conocimiento, en una época determinada, a un mayor nivel de objetividad. La objetividad no es pues una característica del conocimiento que cae ya preformado ante los ojos de la comunidad.

Pero hablar de la actividad de los científicos es hablar de un nivel de desarrollo avanzado. Si de lo que se trata es de investigar el proceso de construcción del conocimiento científico, la perspectiva evolutiva indica que hay que ir hacia atrás, hacia las etapas anteriores, ya que la realidad de un proceso evolutivo no la descubre ninguna de sus etapas en particular, sino el proceso en su totalidad. Al ha-

7 Son procesos prácticamente simultáneos; es nuestra descripción la que genera la ilusión de linealidad en las etapas del trabajo de Piaget.

8 Desde el punto de vista escolar, lo que interesa es que el estudiante pueda ampliar su campo de aplicación de los principios de conservación. En ese sentido, la instrucción tiene un impacto central sobre el desarrollo intelectual del estudiante.

cerse difuso el seguimiento de las ideas en las épocas más tempranas, se desemboca en la psicogénesis, como parte de una estrategia que permite la *construcción de un modelo* del sistema cognitivo. Se trata entonces de indagar los orígenes del funcionamiento cognitivo de un sujeto frente a problemas diseñados a partir de las categorías como espacio, tiempo, conservación de la materia, conservación de la cantidad, etc.

Sin embargo, el largo y arduo trabajo requerido por la investigación psicogenética absorbió casi la mayoría del tiempo y las energías de Piaget (durante más de 50 años); no fue fácil descubrir, por ejemplo, las raíces de la lógica allí en el dominio de la inteligencia sensoriomotriz. Las consecuencias no se hicieron esperar: dio la impresión de que su trabajo estaba orientado completamente a la psicología, lo que fue en perjuicio de las interpretaciones epistemológicas de su trabajo experimental.

Es pertinente señalar en este momento, que la epistemología genética no es una teoría inductiva, extraída de las *evidencias* suministradas por las indagaciones psicogenéticas ni por las histórico-críticas. Más bien, de lo que se trataba era de explorar la posibilidad de comprobación, desde estas dos dimensiones experimentales, de los *hechos* determinados por la teoría. Este punto de vista tiene una importancia particular con respecto a la teoría psicogenética que ha sido el blanco preferido de quienes confunden esta teoría con una psicología del aprendizaje, en el sentido más tradicional del término. Así pues, lo que Piaget observa, cuando observa el funcionamiento cognitivo de los niños, son *hechos determinados por su teoría*.

Un ejemplo importante del uso epistemológico que Piaget da a sus investigaciones psicogenéticas lo constituye la forma en que refuta al empirismo. Sus investigaciones muestran que la conservación del número de elementos de una colección de cuentas, por ejemplo, no es extraído directamente de las agrupaciones de cuentas, no depende de la disposición espacial de los elementos de dicha colección. Es resultado de una construcción que el sujeto hace a partir de una reflexión sobre sus propias acciones.

Aunque la teoría piagetiana señala que los avances cognitivos del individuo suponen adaptaciones a su entorno, físico y social, sus esfuerzos van encaminados básicamente a explicar cómo el sujeto puede dar sentido a un mundo genérico que se describe desde las categorías básicas del pensamiento científico. El sujeto, que explora en ese mundo armado fundamentalmente con su lógica de la acción, nos ofrece la oportunidad de observar cómo se articulan los conceptos a lo largo del desarrollo de su visión del mundo.

Piaget postula que este tipo de observación psicogenética permite construir un modelo de desarrollo del desarrollo científico (el modelo *original* no lo podemos reconstruir dado lo fragmentario de la información histórica o prehistórica que tenemos a nuestra disposición).

Hay dos observaciones que deben reiterarse: la primera, que el sujeto psicológico de Piaget no es el sujeto de las teorías psicológicas tradicionales. Es un sujeto que responde a preguntas sobre las categorías de la ciencia: espacio, tiempo, conservación de la materia, etc. Un sustrato cognitivo común, *un modelo* genérico de desarrollo, por lo menos dentro de las culturas occidentales [Bringuier 1985, 100].

La segunda observación viene en forma de pregunta: ¿cómo evaluar esta hipótesis? Piaget espera que esto se haga de igual forma a como se hace en las ciencias naturales: estimando la capacidad explicativa de su teoría. Esto es indispensable, reiteramos, porque su teoría no tiene pretensiones inductivistas[9].

El sujeto que le interesa a Piaget es aquel que construye la conservación del objeto, que descubre a partir de una reflexión sobre sus acciones que la cantidad de arcilla no cambia aunque cambiemos la forma del material, mostrando con ello que ha accedido a una forma de pensar nueva: antes no podía resolver el problema que se le planteaba con la arcilla; ahora ya puede. Después, mostrará que accede a otra forma de razonamiento, cuando sea capaz de prescindir de cualquier sustrato material como sustento de su pensamiento (no se discute en ese momento cómo llega a ser capaz, sólo que llega a serlo). Ese sujeto (el *sujeto epistémico*) es una abstracción, como lo es el principio de inercia de la dinámica de Galileo y la ley de gravitación universal de Newton, su existencia supone condiciones ideales y, por tanto, imposibles de encontrar en las situaciones de la vida cotidiana.

Lógica y cultura

La teoría del sujeto escolar no puede extraerse mecánicamente, por todo lo que esto implica (o deja de implicar) de la teoría psicogenética de Piaget. El que muchos de sus seguidores lo hayan intentado le ha costado a Piaget un número considerable de críticas desde la psicología. Piaget, como Newton antes que él, *hace hipótesis,* pero estas hipótesis son orientadas a su teoría epistemológica.

Para Piaget, el conocimiento es un fenómeno social que sufre procesos de cambio tanto al nivel individual como al nivel de la historia de la ciencia. Hay que comprender primero cómo se dan esos procesos de cambio, para después poder identificar cuáles son los mecanismos que los conducen.

Para apreciar la dimensión social del conocimiento, comencemos con un ejemplo: el número. Tenemos hoy a nuestra disposición una obra monumental que documenta con precisión y profundidad conceptual la historia de este concepto. Nos referimos a la *Histoire Universelle des Chiffres* [Ifrah, 1994]. ¿qué podemos aprender de esta historia? Que ya desde épocas muy tempranas el ser humano ha construido diversas representaciones para enfrentar el problema de la numerosidad, que todas ellas lo han conducido a una noción de número:

> *Hubo un tiempo cuando los hombres no sabían contar... el concepto de número debía estar revestido, en sus espíritus, del aspecto de una realidad concreta, indisociable de la naturaleza de los objetos, que se reducía a una suerte de percepción directa de la pluralidad material... Nuestros lejanos ancestros, muy probablemente, estaban incapacitados mentalmente para concebir los números [en abstracto], probablemente no tenían conciencia del que el día y la noche, las alas de un pájaro, los ojos, las orejas, los brazos, las piernas de un humano, presentan una característica común, que es precisamente aquella de "ser dos"... Los estudios realizados con niños pequeños así como los análisis etnográficos llevados a cabo con pueblos "primitivos" contemporá-*

9 Para la escuela, de nuevo, lo importante debe ser que el estudiante pueda reconocer, cada vez de manera más sólida, las situaciones en donde tal forma de razonamiento es aplicable.

neos dan mayor fuerza a estas [interpretaciones]... [Ifrah, op. cit. 21]

Los seres humanos poseen pocos instintos. El proceso evolutivo casi *destruyó* la estructura instintiva humana. Pero, a cambio de eso, tenemos la capacidad potencial de asimilar, de reconstruir los logros intelectuales que nos han precedido. Desde luego, para eso contamos con el medio social al que pertenecemos. Contamos con la educación.

La infancia corresponde a una etapa en la que se realiza un inmenso trabajo de elaboración y recreación. Es necesaria la infancia para la realización de una *lógica de la acción,* que se usa para actuar sobre los dominios inmediatos de nuestra percepción. La lógica corresponde a la coordinación general de las acciones. Más adelante, con el progreso evidente de la capacidad semiótica, se crean las posibilidades para la internalización plena de esta lógica, transformándose entonces en una lógica que actúa sobre formas simbólicas. Es la lógica formal del adulto, cualitativamente distinta a la lógica del niño, como ha sido demostrado fehacientemente [Cf. Piaget 1987].

La posibilidad de la traducción del cero *de antes* (el cero Maya por ejemplo) al cero *de ahora*, como cualquier problema de traducción y comunicación, es posible debido a que las diversas culturas comparten estructuras lógicas de base. Esta es una respuesta piagetiana que se ha abierto espacio debido a su fuerza explicativa y también a la tarea, estrechamente vinculada, de comprobación experimental en diversas culturas[10].

Durante años se han realizado en diversas partes del mundo, un número considerable de investigaciones cuyo propósito ha sido *verificar* o *refutar* la teoría de Piaget sobre el desarrollo cognitivo en los más diversos entornos culturales. La secuencia del desarrollo cognitivo [véase Moreno 1996, para una descripción sucinta] se encuentra en todas partes. Cambia, eso sí, el ritmo de desarrollo de las diferentes nociones (aquellas que le interesan a la epistemología) de acuerdo al entorno cultural. Así por ejemplo, en sociedades nómadas que viven de la caza, hay un mayor desarrollo de las habilidades espaciales, que claramente son más valoradas en estas organizaciones sociales. Allí mismo, se valoran menos las nociones relativas a la cantidad, aunque no están ausentes. En las sociedades sedentarias ocurre justamente lo opuesto. Los factores ecoculturales no afectan, empero, el orden de aparición de las etapas. Afectan, eso sí, los niveles de competencia y desempeño [Cf. Dasen 1988, 266]. El trabajo de campo ha permitido mostrar que hay una serie de procesos cognitivos de base que sufren afectaciones culturales. El desarrollo cognitivo, de acuerdo a los datos que ha arrojado hasta ahora la investigación en diferentes culturas, no es ni totalmente universal ni totalmente cultural. Para la educación hay aquí una sugerencia poderosa: hay que tomar en cuenta ambas dimensiones de la cognición: lo universal y lo cultural.

El conocimiento cotidiano [Dasen 1988, 267] está vinculado a los contextos particulares y presenta características más orientadas a la eficiencia de las tareas que a la conceptualización. En este dominio entonces, en lugar de hablar de conocimiento universal o específico, se habla de conocimiento generalizable o particular. Recordemos que el

10 Entendemos cultura como el complejo de características distintivas de orden espiritual, material, intelectual y emocional que caracteriza a una sociedad o grupo.

contexto, en el que está enraizada toda actividad humana, no es tanto una serie de estímulos que afectan a las personas sino, mas bien, una red de relaciones que dan significado a la acción.

Bishop [1988, 60] da cuenta de un interesante trabajo que D. Lancy realizó en Nueva Guinea y que lo llevó a desarrollar una teoría del desarrollo cognitivo para explicar sus resultados. Lancy llegó a la conclusión que el desarrollo cognitivo de las sociedades pasa esencialmente por tres etapas.

La primera, corresponde a las etapas sensoriomotora y pre-operacional de Piaget, con algunas características de la etapa de las operaciones concretas. Lancy argumenta que *los logros de esta etapa son compartidos por todos los seres humanos"* [*Ibíd*.]. Llega incluso a sugerir que es la etapa en donde la programación genética surte los mayores efectos.

De la segunda etapa, nos dice Lancy: *Lo que ocurre con la cognición tiene mucho más que ver con la cultura y menos con la genética* [*Ibid*.]. Es la etapa en la cual, las distintas culturas se interesan en distintos tipos de fenómenos.

Aunque diferentes entornos culturales impulsen el desarrollo cognitivo en diferentes direcciones, no ocurre que se produzcan modos de pensar totalmente divergentes. En las diferentes culturas se cuenta, se mide, se desarrollan conceptos geométricos, se juega (de acuerdo a reglas) y se desarrollan formas de explicar.

Lancy sostiene que es necesaria la consideración de una tercera etapa, donde se considera el nivel metacognitivo. Dice:

> *En esta etapa, además de desarrollar estrategias lingüísticas y cognitivas, los individuos adquieren teorías sobre el lenguaje y la cognición. Aprenden a distinguir sus conocimientos de acuerdo a sus propósitos....[Bishop, Op. Cit., 61]*

Según este enfoque, la etapa de las *operaciones formales* de Piaget, representa la teoría particular del conocimiento que es enfatizada por la cultura occidental y que alcanza su manifestación más acabada en la ciencia actual. Esto explicaría, al menos parcialmente, las dificultades que tienen las culturas y tradiciones no occidentales por desarrollar autónomamente una ciencia que encarna los valores occidentales. Este desarrollo requiere de un trabajo previo de *traducción* que, aunque posibilitado por la existencia de una lógica subyacente común, requiere de esfuerzos considerables por parte de las culturas no occidentales. Este es un foco de alerta para los sistemas educativos de los llamados países del Tercer Mundo.

Resultados análogos arroja el trabajo de Saxe [Hameline-Voneche (eds.), 1996] sobre el número y la medición. Allí también, las características esenciales de la teoría piagetiana se revelan como universales. Podría decirse que el mensaje que se desprende de estas experiencias (las citadas aquí y muchas otras análogas) es que más allá de la diversidad cultural está la unidad de la especie humana. Somos los mismos y somos diferentes. Las diferencias culturales quedan registradas al nivel de las diversas formas de representación [Bourges, 1998]. Los valores culturales encuentran su camino a través de tales representaciones.

En su libro *Psicogénesis e Historia de la Ciencia,* Piaget y García expresan su punto de vista con relación al papel que desempeña el entorno social:

> *...la acción, excepto al comienzo mismo del período sensoriomotriz, no tiene lu-*

> *gar solamente en función de impulsos internos... bien pronto en la experiencia del niño, las situaciones con las cuales se enfrenta son generadas por su entorno social... no se asimilan objetos "puros". Se asimilan situaciones en las cuales los objetos desempeñan ciertos papeles y no otros. Cuando el sistema de comunicación del niño con su entorno social se hace más complejo y más rico, y particularmente cuando el lenguaje se convierte en el medio dominante, lo que podríamos llamar la experiencia directa de los objetos comienza a quedar subordinada, al sistema de significaciones que le otorga el medio social. El problema que aquí surge para la epistemología genética es explicar cómo queda la asimilación, en dichos casos, condicionada por el sistema social de significaciones, y en qué medida la interpretación de cada experiencia depende de ellas. [p. 228, subrayado nuestro].*

A partir de revisión de la obra piagetiana, se ve entonces la necesidad de establecer una clara distinción entre los problemas de orden epistemológico y de aquellos que corresponden al dominio de la educación. Es importante que podamos dilucidar cómo, aquello que aparece como un proceso privado de construcción epistémica es, en realidad, permeado por la cultura. En los ámbitos educativos, esto implica el estudio de la interacción entre estudiantes, profesor, textos y demás elementos portadores de información que puedan ser empleados en el proceso. Lo que podemos llamar *conocimiento objetivo* resulta allí de dos actividades centrales: la cooperación y la coordinación de los distintos puntos de vista. Ya en 1925, Piaget [p. 46] afirmaba que, con la necesidad de comunicar y discutir aparece la necesidad de demostrar y verificar; con la discusión aparece la capacidad de deducir y de razonar verbalmente. En suma, la socialización del pensamiento entraña un progreso lógico innegable. Pero es importante añadir de inmediato que este efecto de socialización no es mecánico ni automático: el niño se socializa en la medida en que *coordina* sus puntos de vista (lo que lo conduce al descentramiento cognitivo) y alcanza un nivel de cooperación con los demás. Piaget nos dice:

> *...Todo pensamiento lógico está socializado, porque implica la posibilidad de comunicación entre individuos. Este intercambio interpersonal se realiza mediante correspondencias, fusiones, intersecciones y reciprocidades, es decir, mediante operaciones. Así pues, las operaciones realizadas dentro de los individuos se identifican con las operaciones realizadas entre los individuos que constituyen [así] la cooperación en el sentido propio y etimológico de la palabra. [Respuesta a Vygotsky (1995), p. 194].*

La idea de que el sujeto nace con su *banco cognitivo completo* no goza hoy día de mucho apoyo. Tampoco es muy acogida la idea contraria, es decir, que todo el conocimiento del sujeto es *adquirido*. Un término medio se impone: el sujeto nace con la potencialidad de interactuar con su entorno, de ser sensible a él de diversas formas y, a partir de allí, desarrollar sus estructuras cognitivas a través de la interacción con el medio físico y, sobretodo, con el medio social. Hay dos elementos en esta expresión que son claves: el sujeto *construye* su conocimiento y desarrolla los instrumentos cognitivos necesarios, para ello el sujeto necesita la *interacción*. El tipo de interacción que necesita va cambiando en una relación dialéctica con su propio desarrollo. Estos dos términos son necesarios para el diseño de una perspectiva cognoscitiva de la educación. Tenerlos presentes, favorece una toma de conciencia sobre el papel activo del sujeto en la elaboración del conocimiento y la necesidad de considerar, en dicho diseño, la dimensión social del aprendizaje.

Los procesos de enseñanza y de aprendizaje de las ciencias no pueden evitar las consideraciones, a fondo, sobre la naturaleza del conocimiento que se quiere enseñar. Esto implica estudios complementarios de naturaleza sociogenética y psicogenética que nos permitan apreciar las componentes individual y cultural del desarrollo del conocimiento. Podríamos citar, a modo de ejemplo, el desarrollo de las geometrías no-euclidianas. Durante muchos siglos, los matemáticos estuvieron convencidos de que, con un cierta dosis de ingenio, sería posible demostrar la veracidad del postulado de las paralelas. Esa creencia no formaba parte de la geometría como tal; estaba enraizada en una concepción del mundo que aquellos matemáticos compartían, a pesar de provenir de culturas muy distintas. De allí podemos concluir que las relaciones entre los procesos cognitivos como tal y las culturas en que toman cuerpo, son complejas, la historia de la ciencia está llena de ejemplos que ilustran la complejidad de estas relaciones.

Otro ejemplo: la concepción geocéntrica del Sistema Solar. Distintas culturas han compartido una visión del mundo que pone a la Tierra en el centro del Universo. La han usado para predecir eclipses. Aunque la interpretación del eclipse en sí mismo haya variado, *la lógica subyacente* a los cálculos ha sido la misma. En otros casos, consideraciones culturales o ideológicas han determinado el campo de interés de los científicos. Pero los métodos, aunque distintos, están construidos con una lógica que hace posible comprenderlos, aún desde otras concepciones del mundo que pudieran ser divergentes[11].

El conocimiento estratificado

La tesis epistemológica piagetiana que afirma que el conocimiento es una construcción sucesiva, individual y social, de la realidad experiencial de los sujetos, tiene una consecuencia decisiva para la enseñanza de las ciencias: los niños y jóvenes inician su formación científica escolar con un acervo propio de explicaciones de los fenómenos naturales, elaborado con base en las experiencias con su mundo físico, social y cultural. Estas explicaciones son, a menudo, incompatibles con las explicaciones de la ciencia establecida y constituyen el factor aislado más importante que dificulta la enseñanza y el aprendizaje de los conceptos científicos.

Si adoptásemos una perspectiva lineal de la apropiación de una ciencia, en la cual el conocimiento *viejo* va siendo sustituido por un conocimiento *nuevo*, podríamos perder de vista que el sujeto puede tener (y de hecho los tiene) diversos enfoques conceptuales sobre un mismo tema. Esos enfoques dependen de las circunstancias en las cuales se manifiesta el conocimiento, es decir, de su contexto. Por ejemplo, un físico profesional puede pedirle a una persona, en un contexto coloquial, que cierre la ventana de una habitación *para que no se meta el frío*, aunque sepa, en estricto sentido, que está invirtiendo el proceso físico al emplear esa estructura lingüística. El aprendizaje ocurre mediante

11 Sugerimos al lector el estudio del capítulo IX *(Ciencia, Psicogénesis e Ideología)* de Piaget y García (1982).

construcciones paralelas, relativas a contextos específicos [Cf. Driver et al, 1994]. Los individuos no piensan de una única manera sobre un tema: van adoptando *perfiles conceptuales* de acuerdo a los dominios específicos que son objeto de sus indagaciones.

Durante el aprendizaje de una ciencia, los estudiantes son introducidos a un mundo conceptual y simbólico. Este mundo no lo construye el estudiante solo: necesita la interacción con los compañeros y maestros. Entonces, al poner en juego sus concepciones previas y las que se van construyendo, alcanza a vislumbrar las limitaciones de sus propias ideas. El proceso de asimilación y acomodación de las distintas estructuras conceptuales de la ciencia, incluye los procesos dialógicos. Esto es fundamental tanto desde el punto de vista cognitivo como desde el punto de vista escolar.

Las investigaciones sobre la estratificación del conocimiento y la contextualización, han dado lugar a una literatura considerable sobre el tema. Los estudios interculturales sobre concepciones alternativas, preconcepciones y conceptos científicos se han incrementado durante la última década [véase Thijs y Van Der Berg, 1995, y las referencias citadas en este artículo central].

El aprendizaje de una ciencia implica un proceso de iniciación a las ideas y prácticas de una comunidad científica. El aprendizaje científico se puede ver como la iniciación a una nueva cultura o, como el proceso de aprendizaje de una segunda lengua. En los estudios interculturales ya mencionados, se tematizan las relaciones entre concepciones alternativas, preconcepciones y conceptos científicos.

Han sido detectadas ciertas formas de interpretar fenómenos físicos, comunes a diversas culturas. Un ejemplo: la concepción más común que se presenta sobre el movimiento es que para que un cuerpo se mantenga en movimiento uniforme (velocidad constante) hay que aplicarle una fuerza constante de manera continua, lo cual está en abierta contradicción con la explicación que nos suministra la física newtoniana.

Una buena parte de las concepciones alternativas y las preconcepciones (ideas intuitivas) de los estudiantes, que se ponen en juego durante el aprendizaje de las ciencias, se basan en *interpretaciones sustancialistas* de los fenómenos naturales, que adquieren así un sentido ontológico [Cf. Thijs et al, op. cit. 337]. Los resultados de las investigaciones sobre las ideas intuitivas ponen de manifiesto que no hay un principio organizador que dé lugar a estas ideas, ellas son construidas a partir de un conjunto de experiencias primitivas fenomenológicas que se movilizan en respuesta a situaciones específicas. Por el contrario, las interpretaciones sustancialistas permanecen en un plano más básico, más elemental y, en consecuencia, es más difícil hacerlas conscientes. Si bien las explicaciones particulares son locales y *ad hoc*, las convicciones ontológicas están en la base de estas explicaciones y las reactivan, porque apelan a categorías que el estudiante pone en juego para analizar el mundo y reaccionar ante él. Las convicciones ontológicas están, en su mayoría, implícitas en el razonamiento. Uno no está consciente de ellas y normalmente no las articula. Como permanecen inexploradas, pueden ser muy resistentes ante nuevas evidencias: cuando una información contradice alguna creencia superficial, ésta puede ser modificada, sin que, no obstante, cambien las convicciones ontológicas subyacentes.

Los análisis históricos y epistemológicos sobre el desarrollo de la ciencia moderna, nos muestran que, en el núcleo de su fundamentación, se encuentra justamente la sustitución del pensamiento sobre la sustancia por un pensamiento sobre las relaciones. Esto último es responsable, en gran medida, de la matematización (funcional) de los modelos de la nueva ciencia. Entonces, al pretender enseñar la ciencia como hoy la conocemos es inevitable que surjan conflictos cognitivos, pues los estudiantes tratarán de hallar el sentido de las preguntas científicas, referidas al *cómo funcional,* a través de sus preconcepciones y concepciones alternativas, que se refieren al *por qué* sustancialista. La fuerte resistencia al abandono de su conocimiento previo, quizás explique la permanencia de estratos conceptuales que el sujeto seguirá adaptando a los contextos de sus diversas experiencias escolares.

Las preconcepciones que se refieren a la experiencia física, por ejemplo, *los cuerpos más pesados caen más rápido que los más livianos,* parecen universales. Las referidas en cambio a la vida, la muerte, la salud o la enfermedad, están claramente marcadas por las culturas [Thijs et al, *op. cit*. 339]. Si bien el aprendizaje de la ciencia equivale a la incorporación a una nueva cultura, lo común de las preconcepciones y concepciones alternativas ha permitido afirmar:

> *No hay evidencia, hasta la fecha, que los diversos grupos culturales varíen en cuanto al repertorio de sus procesos cognitivos. Mas bien, se ha visto que las diferencias culturales residen en contextos, en donde ciertos procesos particulares se tornan en sistemas funcionales. Todas aquellas preguntas sobre si distintos grupos culturales "tienen" ciertas formas de pensar y razonar, han sido gradualmente sustituidas por preguntas acerca de los contextos en los que se aplican esas formas de razonamiento [Valerie Curran, 1980, 328].*

El lenguaje, desde luego gravita en los procesos de aprendizaje, entre otras cosas, porque en el empleo de muchas expresiones coloquiales residen las que a veces son preconcepciones muy tenaces. Pero aún en este dominio, donde se tienen interpretaciones diametralmente opuestas como la hipótesis de Sapir-Whorf (el lenguaje moldea el pensamiento: individuos que hablan lenguas distintas piensan distinto) y la tesis de Chomsky, sobre la existencia de una gramática universal innata, hay espacio para pensar que la manera como los humanos usamos metafóricamente el lenguaje, es universal.

Este análisis que hemos esbozado sobre los estratos conceptuales y preconceptuales parece brindar un apoyo a las interpretaciones que ofrecimos anteriormente de las investigaciones realizadas por la escuela piagetiana.

La oposición entre "sentido común" y "sentido científico" nos muestra que la enseñanza de la ciencia no puede proceder, simplemente, mediante intentos de amplificación del sentido común de los estudiantes.

Referencias

Bishop, A. (1988): *Mathematical Enculturation*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Bringuier, J. C. (1985): *Conversaciones con Piaget*. Barcelona: Gedisa.

Dasen, P. (1988): *Between the Universal and the Specific: The Contribution of the Cross-cultural approach* en Archives de Psychologie, 56, 265-269.

Driver, R., Asoko, H., Leach, J., Mortimer, E., Scot, P. (1994): *Constructing Scientific Knowledge in the Classroom* en Educational Researcher, vol. 23 (7) 5-12.

Ifrah, G. (1994): *Histoire Universelle des Chiffres*, 2 vols. París: Robert Laffont.

Hamelin, D. y Voneche, J. (eds.) (1996): *Agir et construire. Aux origines de la connaissance chez l'enfant et le savant*. Ginebra: Editions FPSE, Université de Genève, Musée d'ethnographie de Genève.

Lewin, P. (1995): *The Social already inhabits the epistemic* en Steffe, L. Gale, J. (Eds.): Constructivism in Education, 423-432. New Jersey: L. Erlbaum Associates.

Moreno, L. (1996): *La Epistemología Genética: una interpretación* en Educación Matemática, 8 (3), 5-23.

Moreno, L. y Sacristán, A. (1995): *On Visual and Symbolic Representations* en Sutherland, R. & Mason, J. (eds.) Exploiting Mental Imagery with Computers, Springer-Verlag.

Moreno, L. y Waldegg, G. (1992): *Constructivismo y Educación Matemática* en Educación Matemática, 4 (2), 7-15.

Piaget, J. (1925): Le development de la pensée de l'enfant en ProJuventute 6, 464-469.

Piaget, J. (1929): Les deux directions de la pensée scientifique en Archives des sciences physiques et naturelles, Año 134, Periodo 5, vol. 11, 145-162

Piaget, J. (1988): *Sabiduría e Ilusiones de la Filosofía*, Barcelona: NeXos.

Piaget, J. y García, R. (1982): *Psicogénesis e Historia de la Ciencia.* México: Siglo XXI.

Thijs y Van der Berg (1995): *Cultural Factors in the Origin and Remediation of Alternative Conceptions in Physics* en Science and Education, 4, 317-347.

Valerie Curran, H. (1980): *Cross-Cultural Perspectives on Cognition* en G. Claxton (ed) Cognitive Psychology, New Directions, 300-334, Londres: Routledge & Kegan

Vygotsky, L. (1995): *Pensamiento y Lenguaje* (Edición revisada y editada por A. Kozulin). Madrid: Paidós

Wertsch, J. (1985): *Vygotsky and the Social Formation of Mind*, Cambridge, MA: Harvard Univ. Press.

Tecnología y representaciones semióticas en el aprendizaje de las matemáticas[12]

Jose Luis Lupiáñez y Luis E. Moreno Armella
CINVESTAV – IPN, México

Resumen

Las nuevas tecnologías modifican substancialmente los entornos socioculturales. El ámbito educativo no es ajeno a este hecho, pero aún es necesario perseverar en las discusiones acerca de cómo ha de llevarse a cabo una adecuada implementación de estas herramientas en el aula, para transformarlas en instrumentos cognitivos.

En este capítulo se elaboran una serie de reflexiones en torno al papel que puede desempeñar la tecnología en esos procesos, y su relación con los sistemas de representación y las representaciones semióticas, que constituyen la clave para entender la construcción del conocimiento matemático de los estudiantes.

1. Introducción: mediación y representación

Una de las tesis centrales de los enfoques psicológicos de corte sociocultural, consiste en sostener que la acción cognitiva *humana* es siempre una acción mediada por alguna forma de herramienta. La herramienta puede ser simbólica (el lenguaje natural por ejemplo) o material (un telescopio, por ejemplo). Para el aprendizaje se desprende entonces una consecuencia nodal: la naturaleza del conocimiento producido depende de la herramienta. Sólo un largo proceso de *descontextualización instrumental* podrá, posteriormente, hacer factible el traslado de ese fragmento de conocimiento a otros contextos (Moreno, 1999).

Hablaremos de la calculadora (TI-92), como un herramienta de mediación en la construcción y estructuración del conocimiento matemático de los estudiantes. La tesis que sostiene que las diferentes representaciones de los conceptos matemáticos son fundamentales para su comprensión, ha llevado a incrementar su estudio durante los últimos tiempos. Muchos investigadores han dedicado sus esfuerzos a precisar el concepto de representación y a analizar el papel que de-

[12] El presente artículo aparecerá en el libro *"Estudios de Doctorado:Iniciación a la investigación en Didáctica de la Matemática"*, libro homenaje al Profesor Mauricio Castro, Universidad de Granada, 2001

sempeñan en el razonamiento de los estudiantes (Duval, 1999).

Por *representaciones* entenderemos, en el ámbito de las matemáticas, notaciones simbólicas o gráficas, o bien manifestaciones verbales, mediante las que se expresan los conceptos y procedimientos en esta disciplina así como sus características y propiedades más relevantes. Estas representaciones se clasifican en *registros de representación* (Duval, 1999), según sus características. Por ejemplo, si consideramos el concepto de *función,* asociado a él existen registros gráficos, algebraicos y tabulares. Desde luego hay otros pero hasta hoy, estos han sido los más usados en la enseñanza. En el interior de cada registro se pueden llevar a cabo *procesamientos*, es decir, transformaciones de las representaciones en el mismo registro donde fueron creadas. Más importante aún, entre diferentes registros de representación se pueden realizar *conversiones*, que son transformaciones de una representación hecha dentro de un registro, en otra representación dentro de otro registro. En el ejemplo de las funciones, una operación de conversión puede ser la de traducir información tabular sobre una función en una gráfica.

2. Educación Matemática y Tecnología

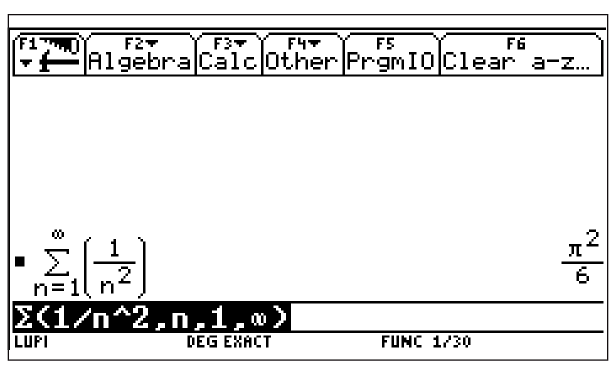
Uno de los principales usos de las computadoras y calculadoras algebraicas (como la TI-89 y la TI-92) tiene que ver con el empleo de los *Sistemas de Cálculo Simbólico* (SCS). Es una tecnología diseñada para gestión computarizada de fórmulas, vectores, matrices, ... con elementos numéricos y simbólicos (García *et al.*, 1995). Actualmente existe un creciente interés en estudiar cómo pueden aprovecharse las posibilidades que brindan esta herramientas para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

En 1972, *Hewlett-Packard* introdujo en el mercado la primera calculadora científica de la historia, la cual realizaba operaciones con las funciones trascendentes (por ejemplo, evaluar funciones trigonométricas o logarítmicas hasta con 12 cifras exactas. *Véase* Demana y Waits, 1997).

En 1986, Casio desarrolló en Japón la primera calculadora graficadora, lo cual fue una auténtica revolución en los entornos educativos. Años después, se produce una nueva ruptura con lo establecido dentro de los sistemas educativos, cuando aparece la TI-92. Como se sabe, esta calculadora (este es un nombre inadecuado para dicha herramienta) posee un sistema de procesamiento simbólico cuyas principales áreas de funcionalidad son:

- aritmética exacta con racionales, reales y complejos
- trabajo con álgebra simbólica
- obtención de soluciones numéricas
- graficación de funciones y superficies.

Veamos algunos ejemplos del trabajo con dicha herramienta, en un contexto educativo.



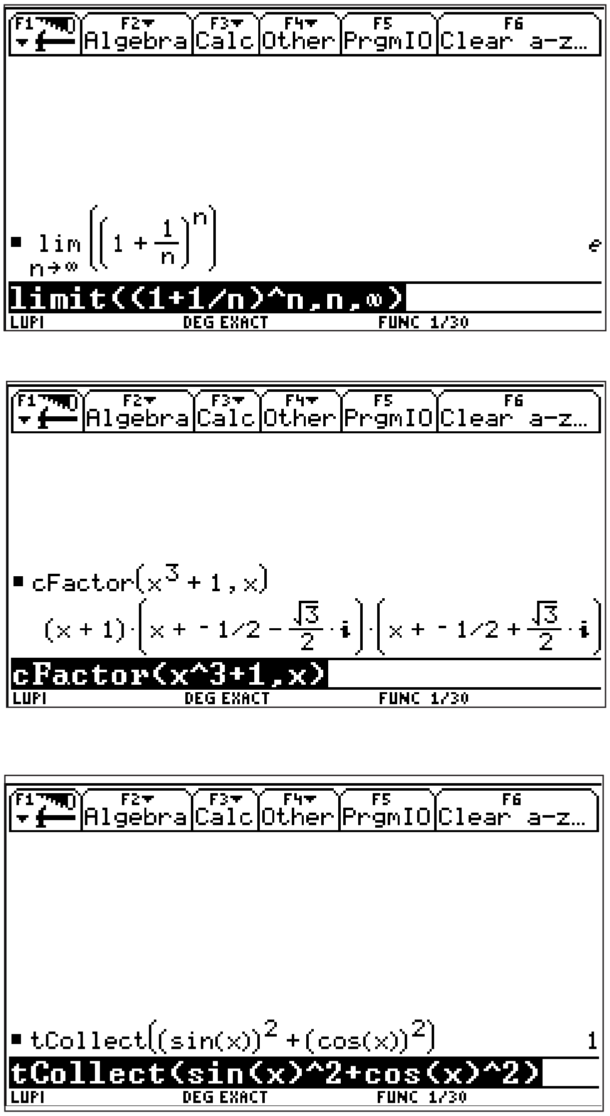


Figura 1

Este tipo de posibilidades de las calculadoras, ha hecho crecer el número de proyectos educativos que incluyen una componente tecnológica, además de alentar a profesores e investigadores a incluirlas dentro de sus actividades. En diversos países se han establecido proyectos y programas para la formación de docentes y estudiantes de matemáticas, con la mediación de estas herramientas computacionales (Rojano & Moreno, 1999).

Un argumento que se esgrime habitualmente en contra del empleo de tecnología en la enseñanza de las matemáticas es que se abandona y olvida lo que se hace con papel y lápiz, y eso va en perjuicio de la calidad en la formación. Creemos que hay que entender la instrumentación de las tecnologías informáticas en la enseñanza de las matemáticas, como un proceso de enriquecimiento, no como substitución, tratando de mejorar capacidades cognitivas, no de substituirlas. Una reflexión más detenida nos enseña que detrás de estas críticas hay una comprensión precaria de la tecnología. Lo primero que se pone de manifiesto cuando se escucha hablar de tecnología es que como tal, sólo se reconoce la *última* tecnología. Ya casi no se menciona que la escritura (¡sobre todo la escritura!) es una forma de tecnología. En la introducción de su libro *Orality and Literacy, The technologizing of the Word*, Ong (1982), nos señala que la investigación ha podido establecer diferencias fundamentales entre las culturas orales y aquellas afectadas por el uso de la escritura. Que muchas de las características que damos por sentadas en el pensamiento científico, por ejemplo, en realidad se originaron *debido a los recursos que la tecnología de la escritura pone a disposición de la conciencia humana* . Aquí se establece algo muy profundo, que ya habíamos mencionado anteriormente: que la mediación de las herramientas afecta sustancialmente los productos de la cognición. En este caso la afectación proviene de la escritura. Entonces, cuando un niño realiza una operación aritmética con papel y lápiz, el trabajo intelectual que realiza depende ya del sistema de escritura y de notación decimal que está mediando sus acciones. La tecnología está presente en este caso aunque casi no la vemos: se ha tornado invisible. (La invisibilidad de las tecnologías una vez que se sumergen en la matriz sociocultural, es uno de sus rasgos mas interesantes.) Si consideramos ejemplos mas recientes, por ejemplo una calculadora simple que sólo tiene capacidad para ejecutar las cuatro operaciones aritméticas, entonces vemos surgir las críticas a su empleo en la escuela primaria. Los niños ya no aprenderán a sumar...debido a la presencia de la calculadora. ¿Es así acaso? Diríamos que es una afirmación "entre dos aguas", que es una verdad a medias. Un uso indiscriminado de la herramienta sin duda introduce distorsiones en el proceso de enseñanza. Pero así como la escritura numérica no es un obstáculo para que el niño pueda realizar cálculos mentales, la calculadora tampoco tiene por qué jugar ese papel. La calculadora no viene a desmovilizar la actividad cognitiva del estudiante, sino a darle la posibilidad de actuar, cognitivamente, en terrenos nuevos. Por ejemplo, el uso de calculadoras que posean sistemas de procesamiento simbólico, permite que el estudiante se centre en la interpretación de lo que está realizando y que no se quede estancado en la realización exclusivamente sintáctica de cálculos repetitivos y tediosos.

3. Educación Matemática y Sistemas de Representación

El papel que juegan las representaciones dentro del marco de la educación tiene una importancia muy relevante. El NCTM, por ejemplo, dentro del borrador de sus *Principios y Estándares para las Matemáticas Escolares del 2000* (NCTM, 1998), sugiere el estudio de las representaciones como uno de los principales. Otra muestra del interés creciente en este tema, es que congresos de conocida relevancia a nivel internacional se centran en él. Así por ejemplo, la XXI reunión del PME-NA, celebrado en México en octubre de 1999, giró en torno a la visualización y representación en Educación Matemática.

Asociadas a la idea de *sistema semiótico de representación* surgen interrogantes que podemos calificar de *complejos*. Por ejemplo, sabemos que del objeto matemático sólo se puede hablar mediante sus representaciones, entonces ¿cómo entender las relaciones entre las representaciones y un objeto que no existe antes de representarlo?, ¿cómo puedo saber que el conjunto de todas las representaciones conocidas de un objeto matemático no lo agotan, y lo que es más, sin usarlas?

La respuestas a estas cuestiones pasan por admitir que la construcción de un concepto matemático es un proceso en permanente desarrollo, por lo que el nivel de objetividad con el que lo entendemos es sólo transitorio. Nunca se posee plenamente el concepto, y por eso no hay lugar a concepciones platónicas de los objetos matemáticos.

En este trabajo, reflexionaremos en torno a las representaciones que suministra la calculadora. Estas representaciones poseen ciertas cualidades que las hacen especialmente productivas para el aprendizaje de las matemáticas. Son *representaciones ejecutables*, es decir, portadoras de la potencialidad de simular acciones cognitivas con independencia del usuario de la calculadora. Tal acontece por ejemplo, cuando la calculadora *grafica* una función.

Quizás una estrategia adecuada, desde la perspectiva del profesor, sea concebir la calculadora como un sistema cognitivo artificial. La calculadora manipula las representaciones tanto internamente como a nivel de la pantalla. Se comunica con el usuario y tiene capacidad para *resolver* ciertos problemas. Aunque todo esto es posible porque ha sido programada por humanos, la complejidad del instrumento es tal, que alcanza una cierta autonomía (al menos a ojos del usuario). Podríamos ver la calculadora como un sistema cognitivo con el que tenemos oportunidad de comunicarnos y de colaborar en la solución de ciertos problemas. La calculadora ofrece la oportunidad de que el estudiante interactúe con un *nuevo socio cognitivo* y pueda construir nuevos significados. Desde la perspectiva del profesor, la calculadora es un nuevo agente de enseñanza. El conocimiento que *vive* en la calculadora es un referente para el estudiante, en el proceso de socializar su conocimiento.

Es crucial entender que los objetos que aparecen en la pantalla y que manipula la calculadora, no son objetos concretos ni objetos del mundo matemático formal: son objetos virtuales que están en la interface que separa el mundo conceptual de las matemáticas del mundo de los objetos concretos. Son pues instrumentos de conocimiento, no conocimiento en sí mismos.

4. Representaciones Ejecutables

Las calculadoras graficadoras en general (especialmente la TI-89 y la TI-92) suministran un amplio abanico de representaciones de objetos y relaciones matemáticas en diferentes registros. Y lo que es más importante, permiten pasar de unos a otros registros, es decir, permiten la conversión de registros, lo cual supone una inapreciable herramienta de trabajo en educación matemática.

En el medio de expresión que suministran las calculadoras, pueden obtenerse propiedades y relaciones matemáticas de esos objetos, distintas a las que se observan mediante papel y lápiz. Un ejemplo: representar funciones en la máquina que resultan prácticamente imposibles de dibujar en el papel, permitiendo así conjeturar propiedades y *comprobar visualmente* (actividad que puede tener un importante uso didáctico) hechos que escapaban al análisis algebraico. Para ilustrar lo anterior, tomemos una función que fue importante en la búsqueda de funciones continuas pero no derivables en ningún punto.

Antes de la sorprendente presentación que dio Karl Weierstrass en la Academia de Berlín en 1872 de la serie trigonométrica $f(x)=\sum_{n-1}^{\infty} b^n \, Cos(a^n \, \pi \, x)$(en donde *a* es un entero impar, *b* es un real entre 0 y 1, y se ha de verificar que *ab* sea mayor que $1 + 3\pi/2$) como ejemplo de función continua no derivable, en 1861 Riemann introdujo, en uno de sus trabajos la siguiente función, afirmando que era continua para cualquier valor de x pero que existían infinitos valores de la variable en donde no era diferenciable (Bressoud, 1994):

$$f(x)=\sum_{n-1}^{\infty} \frac{Sin(n^2 x)}{n^2}$$

La no diferenciabilidad de esta serie es difícil de probar, y no fue sino hasta 1916, cuando G.H. Hardy mostró que, dado cualquier intervalo acotado, existen en él infinitos valores de x en los que la función no es diferenciable, pero en 1970 se demostró que también existen infinitos valores de la variable en los que sí lo es. Si representamos algunas sumas parciales de esta función en la calculadora podemos observar lo complicado de su gráfica, si bien puede encontrarse cierto carácter simétrico asociable a la acción de la función seno. En la figura 2 se muestra la suma de los 15 primeros términos de la serie, y el recuadro indicado en ésta se ve ampliado en la figura 3.

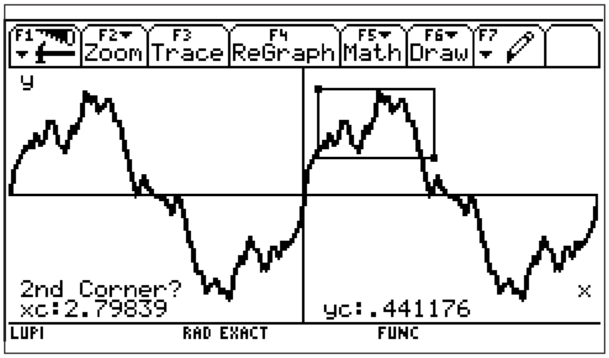


Figura 2

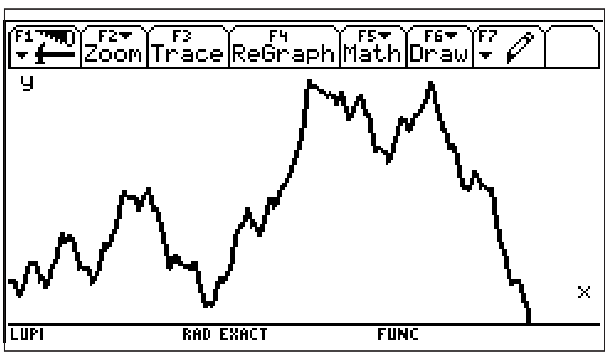


Figura 3

Dentro del ambiente de trabajo de la calculadora, una función es derivable en un punto si al realizar sucesivamente varios ZOOM sobre su gráfica, un entorno de la imagen de ese punto se ve como un trozo de recta. Si hacemos esto sucesivas veces en el ejemplo arriba citado, nos acercamos a una forma de argumentación de la existencia de infinitos puntos en los que la función no es derivable.

El poder de la tecnología es epistemológico. Su impacto está basado en una reificación de objetos y relaciones matemáticas, (Balacheff y Kaput, 1996), que los estudiantes usan para actuar más directamente sobre dichos objetos y relaciones de lo que se hacía antes, con una enseñanza auxiliada con tecnologías más tradicionales. La calculadora permite ver los objetos matemáticos como *manipulables*, y permite actuar sobre ellos y por eso, la fuerza de la tecnología está basada, en gran medida, en esa reificación de objetos y relaciones matemáticas.

Las representaciones analíticas tradicionales, se han visto ampliamente complementadas y enriquecidas con estas recientes tecnologías. El carácter estático que poseen los sistemas de representación tradicionales desaparece con *las representaciones ejecutables*, que son manipulables, que permiten actuar directamente sobre ellas. Esto se ilustra muy bien en los entornos de geometría dinámica como el Cabri, del cual la TI-92 incorpora una versión. Si en este ambiente representamos un triángulo, y trazamos las bisectrices de sus ángulos externos, puede observarse que éstas se cortan en un punto, y que si variamos la posición, forma, o medidas con la posibilidad que brinda el *dragging* (deformación de la figura sin alterar sus relaciones geométricas) del entorno, esta propiedad se sigue verificando (figura 4):

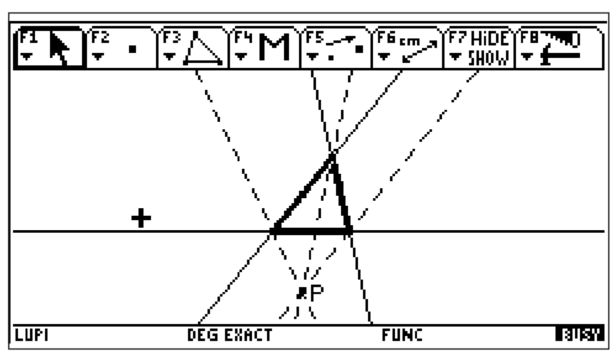


Figura 4

Con esta actividad puede plantearse la construcción de las circunferencias exteriores a un triángulo, que es un ejercicio de especial belleza geométrica (figura 5):

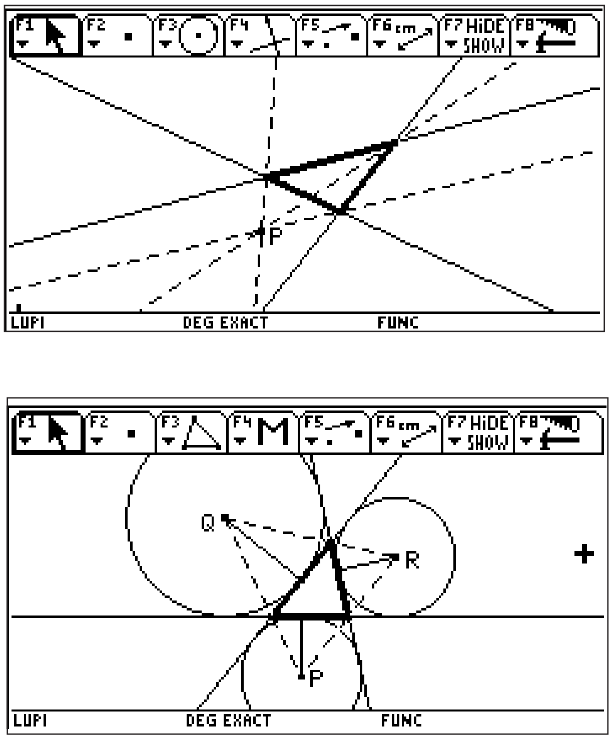


Figura 5

Esto viene a destacar esa idea de representaciones ejecutables que brindan estas herramientas, en contraposición a las representaciones estáticas tradicionales, con las cuales resulta menos que imposible, visualizar ciertas propiedades de los objetos matemáticos. Las ideas y conceptos abstractos de las matemáticas se convierten en reales con el uso de la calculadora, en el sentido de que se pueden manipular, transformar. En otras palabras, se hace posible *intervenirlos matemáticamente*.

Las representaciones ejecutables tienen consecuencias diversas para el proceso de construcción del conocimiento: el hecho de usarlas permite reflexionar sobre un nuevo objeto, que es el resultado de la ejecución; hay dos objetos de reflexión: ese resultado y el texto que se ejecuta, por ejemplo cuando se trata de una serie de instrucciones organizadas a través de un programa. Un ejemplo de esto lo constituyen los *Scripts* que pueden realizarse con la calculadora. Un Script es un documento del Editor de Textos formado por una serie de comandos que permiten al usuario hacer más sencillo el manejo de la máquina al poder repetir importantes procesos con sólo alterar las funciones o variables que intervienen. Tomemos la siguiente actividad como ejemplo:

Dada la función racional $f(x)=\dfrac{x^4+x^3-6x^2+6}{x^2+x-6}$, *analizar su gráfica y compararla con la de la parábola .*

Construir la gráfica de esta función no es tarea fácil, ya que es complejo hallar los valores necesarios debido sobre todo a las dos asíntotas que presenta (figura 6).

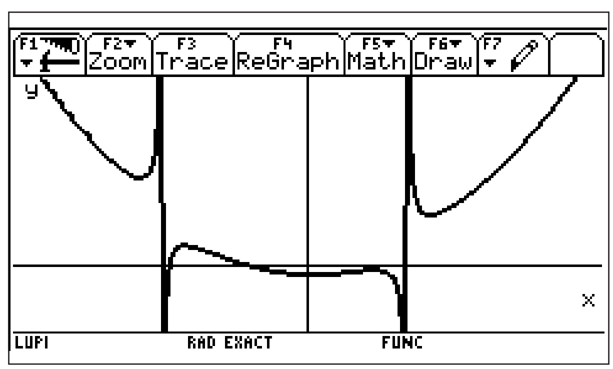


Figura 6

No obstante, y a pesar de esta complejidad, puede reconocerse cierto comportamiento parabólico en la gráfica; más concretamente, parece un parábola salvo en un entorno de los *puntos malos* en los que hay asíntotas.

Otra operación que por lo general no es nada sencilla, consiste en expresar un cociente de polinomios como fracciones simples. Esta operación puede realizarse con la calculadora mediante la orden *PropFrac* (figura 7).

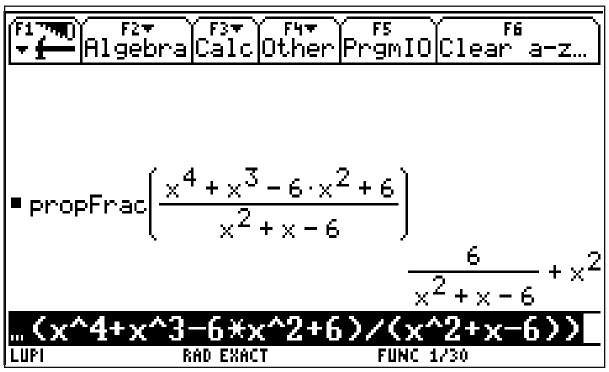


Figura 7

Lo que hacemos con un Script es escribir en el lenguaje ordinario de la máquina, las órdenes necesarias para que grafique una función racional y calcule su expresión como fracciones continuas. Además, distinguimos la parte hiperbólica y la parabólica, y representamos ésta última junto con la función original; podemos entonces observar cómo la parábola aproxima muy bien al cociente, y nos puede servir para evaluar dicho cociente para valores grandes de x (figura 8).

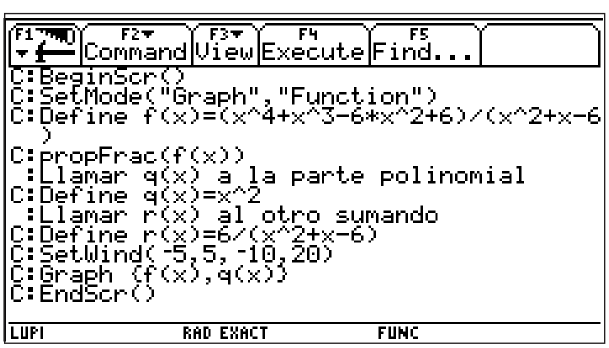


Figura 8

Cada una de las líneas del Script constituye un comando que se ejecuta de manera secuencial, permitiendo que el estudiante pueda observar qué va ocurriendo. Además, se pueden insertar líneas explicativas que aclaren o guíen este proceso. Por otro lado, no necesitamos cambiar esos comandos para trabajar la actividad con otro ejemplo, pues es suficiente alterar la definición de la función original y redefinir la parábola (figura 9).

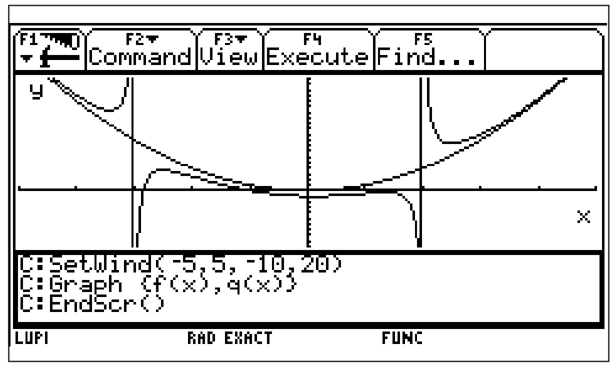


Figura 9

Actividades como ésta, y las ya mencionadas en el resto del trabajo, dan idea de la capacidad que tienen estos instrumentos para incidir en la formación matemática de los estudiantes, pues ofrecen representaciones y relaciones entre objetos matemáticos con las que ellos pueden interactuar, dando una nueva dimensión a la construcción del conocimiento matemático.

Queremos destacar el hecho que para llevar al aula un trabajo de este tipo, se requieren diferentes consideraciones en torno a los proyectos curriculares y, en particular, a la formación de los docentes. No se trata de hacer con estas herramientas sólo lo que se hacía sin ellas, sino que es necesaria un re-organización de los objetivos, las actividades y la manera de evaluación en matemáticas, y eso pasa por una instrucción precisa del profesorado.

Referencias

Bressoud, D. (1994) *A Radical Approach to Real Analysis*. Washington: Mathematical Association of America (MAA).

Demana, F., Waits, B. (1997) *The Evolution of Instructional Use of Hand Held Technology. What we wanted? What we got!* Documento On-Line:htpp:/www.math.ohio - state.edu/~waitsb/Papers/transcfd033098

Duval, R. (1999) *Semiosis y Pensamiento Humano*. Traducción al español a cargo de M. Vega, realizada en la Universidad del Valle, Colombia, del original francés del mismo título publicado por P. Lang, Suiza en 1995.

Moreno, Luis (1999). *Acerca del conocimiento y sus Mediaciones en la Educación Matemática*. Revista EMA, 1999, Vol. 4, Nº 2, 101-114.

NCTM (1998). *Principles and Standards in School Mathematics: Discussion Draft*. Reston, Virginia: NCTM.

Ong, W. (1982). *Orality and Literacy*, *The technologizing of the Word.* Methuen & Co, London. (Existe traducción al español del Fondo de Cultura Económica, México, 1987.)

Rojano, T. & Moreno, L. *Educación Matemática: Investigación y Tecnología en el Nuevo Siglo*. Avance y Perspectiva, 18, pp. 325-333.

Vonder Embse, C. & Yoder, V. (1998). *Multiple Representations and Connections Using Technology*. The Mathematics Teacher, Vol. 91, No.1, Enero 1998.

Wertsch, J. (1993) *Voces de la Mente*. Madrid: Visor.

La demostración en perspectiva[13]

Luis E. Moreno Armella
CINVESTAV – IPN, México

Introducción de Euclides a Hilbert

La Matemática no es sólo un cuerpo de conocimientos sino una *actividad*. En la versión contemporánea de la disciplina, parte del núcleo de la actividad lo constituye *la demostración*. En realidad ha sido así desde la refundación de la disciplina en manos de los griegos.

La matemática griega introdujo un elemento novedoso en la matemática: *el método deductivo*, en el marco de las *organizaciones locales*. Por ejemplo la geometría del triángulo, la geometría de la circunferencia fueron desarrollándose como *pequeños universos* de conocimiento geométrico. De esta manera fue posible aplicar los resultados que iban siendo establecidos dentro de estos universos a problemas del espacio físico. Desde luego, la geometría se desarrolla como una *representación y organización del conocimiento sobre el espacio físico*. Un ejemplo sobresaliente lo constituye el método ideado por Eratóstenes para estimar el radio de la tierra. Este tipo de ejemplos, en donde no es posible la verificación directa del resultado, fue importante para establecer el método deductivo como un criterio de validación, en cierta forma para sustituir una comprobación que estaba ausente.

En la incorporación del método deductivo a la matemática también resultó central la *intención filosófica de construir una ciencia teórica cuya meta era el conocimiento de la verdad* (Véase Metaphysics, p. 512). El objetivo del método deductivo era explicar: *explicar era demostrar*. Para explicar, hay que partir, en una ciencia, de *primeros principios*. Esta organización, ya de carácter global, en la geometría, quedó plasmada en los **Elementos** de Euclides. Allí hay una organización que rebasa ampliamente las organizaciones locales a las que ya hemos hecho referencia al comienzo de este trabajo. La intención filosófica de construir una ciencia desde sus primeros principios, la podemos hallar en Aristóteles quien se propuso analizar lo que era una *ciencia demostrativa*. El tema central de su libro **Tópicos** es *la demostración y la facultad que la realiza* (*véase* Tópicos 1.1, p. 39). Allí se encuentran los elementos que componen una ciencia demostrativa:

(i) las definiciones

(ii) los primeros principios, que los hay de dos clases: los específicos de cada cien-

[13] Artículo publicado en la Revista Mexicana de Investigación Educativa, Vol. 1, 1996.

cia, llamados *postulados* y los comunes a todas, los *axiomas*

(iii) finalmente, está el cuerpo deductivo, compuesto por las proposiciones demostradas a través de la inferencia.

A grandes rasgos, estos son los antecedentes de la organización axiomática de la geometría griega. Lo que siguió, es decir *la exploración de las proposiciones como miembros constitutivos de un sistema axiomático de la geometría*, fue cambiando gradualmente el significado de estas mismas proposiciones. Dejaron de ser vistas como representaciones de alguna propiedad del espacio (físico). Es decir, fueron perdiendo su *valor ontológico*, y fue enfatizado su aspecto lógico. Empero, esto no fue un proceso breve. Duró varios siglos y hubo profundas razones para ello.

La principal fue, quizás, el desarrollo impulsado por los intentos de demostrar el V Postulado, pues ya desde tiempos de Euclides fue visto como una proposición *muy complicada* para adjudicársele la categoría de postulado: carecía de la evidencia en sí que debía caracterizar las proposiciones dignas de tal nombre. La historia de los intentos de demostración del postulado de las paralelas cubre una parte sustancial de la historia de la geometría hasta el siglo XIX. Cubre, en particular, parte importante de la evolución de la idea de demostración. Desde el comienzo fue claro para quienes buscaron tal prueba que habría que hacerlo dentro del contexto euclidiano y ello comportaba una hipótesis de profundo valor epistemológico: *el espacio era euclidiano*. La demostración del postulado simplemente haría más ligero el sistema postulacional. No hubo, en general, duda alguna del isomorfismo entre el sistema euclideo y el espacio físico. Hasta comienzos del siglo pasado pues, la idea de lo que constituía una demostración en geometría fue esencialmente la misma que la establecida oficialmente en los Elementos de Euclides.

La exploración rigurosa de los fundamentos de la matemática durante el siglo XIX, condujo a la desvalorización de la *figura* como objeto cognitivo dentro de la matemática. Este abandono de lo visual trajo como consecuencia, *el predominio del lenguaje analítico* para comunicar las matemáticas.

Hasta el siglo XIX la obra de Euclides fue considerada como uno de los modelos de la matemática por la metodología mediante la cual valida sus resultados. Cuando Newton publica su obra, los **Principia,** toma como modelo a los Elementos de Euclides. Empero, en su trabajo sobre el cálculo, que se desarrolla mediante el lenguaje del álgebra, sus criterios de legitimación son diferentes. Todo esto nos enseña que hasta el siglo XVIII la geometría y el álgebra se regían por diferentes criterios validatorios (véase el trabajo de Newton sobre Series Infinitas, edición de Whiteside).

La situación que acabamos de describir cambió radicalmente durante el siglo XIX. Entonces, la metodología de la geometría fue adoptada por el álgebra y el análisis. La geometría misma sufrió cambios radicales a través de la obra **Fundamentos de Geometría** de D. Hilbert. En los Elementos, los axiomas son *verdades evidentes* por lo cual no necesitan de una demostración que los justifique como tales. En consecuencia, lo que podamos deducir de ellos, tendrá también el carácter de verdad que tienen los axiomas. En cambio, en el trabajo de Hilbert, no se tiene en cuenta el carácter de verdad de los axiomas; lo fundamental es que el conjunto de axiomas sea consistente. Es decir, que los axiomas no se contradigan entre sí. Por ejemplo, no debe haber, además del axioma de unicidad de la paralela por un punto exterior a una recta, otro axioma que afirme o del cual pudiera deducirse la existencia de más de una paralela por un punto exterior a una recta. Los resultados que se deduzcan de los axiomas tendrán el carácter de *deducciones* pero no un valor asociado de verdad.

La verdad ———→ La consistencia

Este esquema sugiere la transformación que sufrió la axiomatización de Euclides en manos de Hilbert: una extracción del significado de los términos y proposiciones de la geometría y su correspondiente sustitución por el criterio lógico de la consistencia. Este proceso de *desustanciación* de la geometría, en el que ya no importa la naturaleza de los objetos de los que se habla sino la coherencia del discurso, corresponde a un movimiento general en la matemática del siglo XIX.

Geometría y desustanciación

La obra de Hilbert sobre los fundamentos de la geometría apareció como consecuencia de un movimiento general de la matemática: la búsqueda de fundamentos de naturaleza analítica para esta disciplina. Se partió de una idea expresada por Hilbert sobre los axiomas de una teoría: lo realmente importante no son los significados (interpretaciones) que podamos asociar a tales axiomas sino la coherencia que ellos mantengan entre sí. Los axiomas juegan el papel de *definiciones implícitas* de los términos de la teoría que vienen mencionados en estos axiomas. Entonces, según Hilbert, no importa lo que *son* los puntos, las líneas y los planos; lo que importa son las relaciones entre ellos que vienen dadas por los axiomas. El libro de Courant—Robbins **¿Qué es la Matemática?**, expresa este punto de vista de manera espléndida:

> *"A través de los tiempos los matemáticos consideraron sus objetos —números, puntos, etc.—como cosas sustanciales en sí. Pero en vista de que aquellos desafiaban una descripción adecuada, los matemáticos del siglo pasado llegaron a la convicción de que el problema de la significación de dichos objetos como cosas sustanciales no tenía sentido dentro de la matemática. Las únicas proposiciones relativas a ellos que importan son las que expresan las relaciones mutuas entre objetos indefinidos: su estructura y relaciones... la percepción de la necesidad de la desustanciación de los objetos matemáticos ha sido uno de los resultados más fecundos del desarrollo axiomático moderno".*

Dos procesos pueden ser identificados como cruciales para desencadenar el programa de desustanciación impulsado por Hilbert. Uno, la fundación de las geometrías no-euclidianas. Con el advenimiento de la geometría de Lobachevsky, quedó inaugurado un nuevo camino para la geometría: la geometría como representación de un espacio posible. En otros términos, *el paso de Euclides a Lobachevsky es el paso de la geometría de los objetos a la geometría de las estructuras*.

El problema de decidir si el espacio es euclideo ya no es más un problema de la geometría sino de la física. La geometría suministra modelos, no representaciones icónicas del espacio. Hay otro punto de vista desde el cual puede generarse una novedosa interpretación del formalismo hilbertiano. Es la debida a Thom:

> *La gran lección de Hilbert consiste en mostrarnos que la formalización absoluta sólo es posible al costo de la extrac-*

> *ción total del significado (del sistema axiomático del que estemos dando cuenta).*

Podemos decir entonces que el formalismo es la condición mediante la cual la acción queda separada del significado.

La demostración del V postulado

Hemos visto los extremos de una historia. Digámoslo así: **todo comenzó con Euclides y terminó con Hilbert**. Este camino es el que lleva de la verdad a la consistencia.

La ciencia griega representa el resultado de una actividad cognitiva sobre lo empírico. Está vinculada prioritariamente a la abstracción empírica. La ciencia de Hilbert es resultado de una reflexión sobre una ciencia ya constituida, cada concepto es resultado de una reflexión sobre el contexto total del concepto. **Es resultado de una abstracción reflexiva**.

Entonces, la geometría griega trata de descubrir verdades ocultas mediante un razonamiento deductivo íntimamente vinculado a la ontología. Esta característica subsiste durante siglos y puede verse *cómo influye en la estructura de los razonamientos* que buscan demostrar el V postulado. Consideremos un ejemplo: Wallis (1616-1703). Su estrategia se apoya en la existencia de triángulos semejantes. Uno de los postulados de Euclides nos dice que con cualquier centro y cualquier radio puede trazarse una circunferencia. En particular pueden trazarse diferentes circunferencias concéntricas. Dado que los triángulos son figuras aún mas simples, esta observación hace plausible suponer la existencia de triángulos semejantes. Esto es parte de la ontología subyacente a la geometría.

La demostración de Wallis es como sigue: dado el punto P exterior a la recta l constrúyase la paralela m a l por P. $\overline{PQ}$ es perpendicular tanto a l como a m (Q en l). Sea n otra recta distinta a m y a la recta determinada por $\overline{PQ}$, que pase por P. Tómese R sobre n, entre m y l y sobre m tómese S el pie de la perpendicular RS a m. Considerando el triángulo PSR y el lado $\overline{PQ}$ debe existir un punto T de modo que el triángulo PQT sea semejante al triángulo PSR. Se concluye que el rayo PR coincide con el rayo PT. Es decir T está sobre el rayo PR. Por otro lado, el ángulo PQT es recto. Entonces T está en la intersección de l y n. Es decir la única paralela a l por P es m.

Llevando el análisis más lejos podemos demostrar a su vez, que la existencia de triángulos semejantes se sigue del V postulado. Como son lógicamente equivalentes, la prueba de Wallis sufre del mal de *petición de principio*. El mal del que sufren todas las demostraciones del V postulado cuando se tratan de realizar desde los otros cuatro postulados de Euclides. Esto es lo que llevó a Lobachevsky a declarar en sus Nuevos Principios de la Geometría (1835):

> *Es bien conocido que hasta la fecha la Teoría de las Paralelas ha permanecido incompleta. Los esfuerzos infructuosos hechos desde tiempos de Euclides y a lo largo de un periodo de más de dos mil años, me han convencido de que los conceptos involucrados en esta investigación no contienen la verdad de lo que se desea demostrar; que para establecerla se necesita el apoyo del experimento, por ejemplo de observaciones astronómicas, como es el caso con otras leyes de la naturaleza.*

Este párrafo muestra de modo convincente que hacia 1835 estaba clara la independencia lógica del V postulado de los restantes de la geometría euclidiana, y que se había producido una ruptura en la interpretación que la tradición había impuesto entre la geometría y el espacio físico.

Consecuencias: hacia la estructura

Hasta el siglo XIX la matemática podía apoyarse tanto en la geometría como en el álgebra para buscar sustentación a sus afirmaciones. La toma de conciencia de que el contenido de verdad quedaba sustituido por la consistencia del modelo, volcó los esfuerzos hacia la aritmética. ¿Habría allí la fuente de verdad que parecía necesaria para continuar el trabajo matemático? Veamos la situación que prevalecía en el cálculo. Desde Galileo y Newton, una de las tradiciones generadoras del cálculo extrajo, del contexto geométrico del estudio dinámico del movimiento, las reglas de operación del nuevo cálculo. El libro de Polya, **Matemáticas y Razonamiento Plausible** reproduce de modo por demás brillante, varios ejemplos de esto. Aquí, sin embargo, no puede hablarse de una actitud totalmente anclada en el pensamiento empirista pues en el estudio del movimiento aparece un concepto que no pudo ser extraído de allí: el concepto de velocidad instantánea.

El desarrollo del cálculo, del cálculo **infinitesimal**, siguió las líneas que le eran posibles con este sustento conceptual. Desde luego hubo momentos de crisis como el que se dio alrededor del problema de la cuerda vibrante y que en el fondo reflejó una incapacidad del cálculo, hasta ese momento, para modelar el movimiento de un continuo. Pero el momento de crisis que nos interesa registrar se dio durante el siglo XIX.

Es cuando Weierstrass publica (1872), gracias a los buenos oficios de su discípulo Paul Du Bois Reymond, su teorema sobre *la existencia de funciones continuas que en ningún punto tienen derivada*. Las consecuencias de este resultado son profundas. Hasta entonces, para hablar de una función continua se decía que era *aquella cuya gráfica puede trazarse sin levantar el lápiz del papel.* Aún hoy en día usamos esta expresión cuando queremos dar una idea *informal* sobre la continuidad de una función. Pero el resultado de Weierstrass mostró que se podía hablar de la continuidad en un lenguaje totalmente analítico. Es decir, no era necesario recurrir a las imágenes geométricas, a lo que los dibujos sugerían para poder hablar con *precisión* sobre la continuidad. La existencia de funciones continuas sin derivadas así lo mostraban, pues tales funciones *no se pueden graficar.*

Aparecieron desde entonces advertencias sobre lo *peligroso* que resultaba confiar demasiado en las conclusiones extraídas de un dibujo. Se dieron *demostraciones falsas* basadas en dibujos de triángulos, que llevaban a la conclusión de que *todos los triángulos son equiláteros*, por ejemplo. *El ojo era digno de desconfianza*, como ha dicho P. Davis.

La crisis no era sólo de carácter metodológico. Las estructuras conceptuales, la continuidad por ejemplo, debieron entonces ser revisadas. Esto nos habla de un cambio en la naturaleza misma del conocimiento. Una vez más el problema de la desustanciación. La toma de conciencia sobre la estructura.

Desde luego, en esta perspectiva se quedan muchas cosas por fuera: unas por la presión del tiempo, otras por mi desconocimiento. Pero creo que lo que sí puede verse, desde los ojos de nuestra teoría —parafraseando a Hanson— es que la idea de demostración está vinculada orgánicamente a la concepción de los objetos de la matemática y que ambos son resultado de una historia.

Referencias

Euclides, *Elementos de Euclides*, ed. Gredos, Madrid, 1991.

Hilbert, D. *Fundamentos de la Geometría*, Madrid, C.S. I. C. 1952.

Courant, R. , Robbins,H. *¿Qué es la Matemática?,* ed. Aguilar, Madrid, 1962.

Whiteside, T. *Mathematical papers of I. Newton*, Cambridge U. Press, 1967.

Proceso de transformación del uso de tecnología en herramienta para solucionar problemas de matemáticas por los estudiantes

Luis Moreno Armella y Manuel Santos Trigo
CINVESTAV – IPN, México
Traducido por Martín Eduardo Acosta Gempeler
Grupo Coordinador
Ministerio de Educación Nacional

El uso de la tecnología por parte de los estudiantes juega un rol importante en su aprendizaje de las matemáticas. Aquí reportamos el trabajo de alumnos de secundaria que participaron en actividades de resolución de problemas utilizando software de geometría dinámica (Cabri). Un problema planteado por los estudiantes fue utilizado como medio para ilustrar tres estrategias diferentes que aparecieron en el trabajo de los estudiantes. Cada estrategia muestra diferentes procesos y herramientas matemáticos que les ayudaron a explorar y resolver el problema.

Algunas de las propuestas curriculares recientes identifican el uso de la tecnología como una herramienta poderosa para el aprendizaje de las matemáticas (NCTM, 2000). Los estudiantes pueden usar la tecnología de diversas maneras; en particular, la idea de que con ayuda de algún software o calculadora puedan realizar fácilmente representaciones, explorar diferentes casos, encontrar lugares geométricos o trayectorias de puntos (segmentos o figuras), parece atractiva al diseñar actividades de aprendizaje. ¿Qué tipo de herramientas matemáticas necesitan los estudiantes para poder mostrar un uso eficiente o significativo de la tecnología durante sus experiencias de aprendizaje? ¿En qué momento el uso de la tecnología se convierte en una herramienta poderosa para los estudiantes? Estas son preguntas que dan información para explicar lo que pueden lograr los estudiantes en una clase que promueve el uso de la tecnología. En este artículo documentamos aspectos del aprendizaje de los estudiantes que muestran un proceso de adaptación de los mismos en el uso de la tecnología. En esta etapa los estudiantes no sólo buscan diferentes estrategias para representar y resolver problemas, sino que rediseñan o formulan de manera explícita sus propias preguntas o problemas.

Marco conceptual

En una sociedad cambiante y exigente el estudio de las matemáticas es una necesidad importante de todos los estudiantes; sin embargo, como lo mencionan Romberg y Kaput:

> *"los cambios hacen imperativo que cualquier respuesta a la pregunta "¿qué matemáticas vale la pena enseñar?" sea revisada periódicamente... independientemente del contenido específico, el propósito de enseñar matemáticas puede describirse en términos de enseñar a los estudiantes a usar matemáticas para construir y comunicar ideas, usarlas como una herramienta poderosa para analizar y resolver problemas, y quedar fascinados con los patrones que ellas abarcan y exponen" (pp. 15-16).*

El uso de la tecnología puede jugar un rol importante pues ayuda a los estudiantes a representar, identificar y explorar comportamientos de relaciones matemáticas diferentes. Una meta importante durante el proceso de aprendizaje en matemáticas es que el estudiante desarrolle aprecio y disposición hacia una indagación matemática genuina, durante sus experiencias de aprendizaje en la escuela. En las propuestas curriculares actuales (NCTM 200), se ha vuelto importante la idea de que los estudiantes deben plantear preguntas, buscar diferentes tipos de representación y presentar diferentes argumentos durante su interacción con tareas matemáticas. De esta manera, el rol de los estudiantes va más allá de ver las matemáticas como un cuerpo de conocimientos fijo y estático; por el contrario conceptualizan el estudio de las matemáticas como una actividad en la que deben participar para identificar, explorar y comunicar ideas implícitas en situaciones matemáticas.

> *...Los estudiantes mismos desarrollan el hábito de reflexionar sobre las actividades que realizan cuando están aprendiendo a resolver problemas. Desarrollan relaciones que pueden dar significado a nuevas ideas, y examinan críticamente su conocimiento buscando relaciones nuevas y mas productivas. Llegan a ver el aprendizaje como resolución de un problema en el que la meta es ampliar sus conocimientos (Carpenter & Lehrer, 1999, p.23).*

También es sabido que los profesores deberían crear un ambiente de clase que promoviera experiencias para reflexionar, conjeturar y persistir. En este contexto, el diseño e implementación de problemas que favorezcan el uso de esas experiencias, sigue siendo un gran desafío en la educación en resolución de problemas (Santos, 1998). Nosotros ilustramos cómo el uso de la tecnología con el tiempo se convierte en una herramienta poderosa para que los estudiantes le den sentido a la información, propongan conjeturas, y examinen diferentes estrategias de resolución de problemas. Animamos a los estudiantes a trabajar como una comunidad en la que se valora no sólo las contribuciones personales, sino también la participación como grupo. El compromiso de los estudiantes en el proceso de indagación y explicación se convierte en el ingrediente clave para el trabajo con los problemas.

Métodos y procedimientos

16 estudiantes de grado 12 participaron en un seminario de cuatro semanas con dos sesiones por semana (2,5 horas cada sesión). La idea general del seminario era utilizar *software* de geometría dinámica para resolver problemas, inicialmente planteados por el profesor. Luego, se pidió a los alumnos que ellos mismos propusieran ejercicios y problemas. Durante las dos pri-

meras sesiones el profesor dio una introducción general sobre le uso del *software* e ilustró el uso de ciertos comandos para toda la clase. En general, cada alumno trabajó primero de manera individual, luego en pequeños subgrupos de cuatro miembros, y al final de cada sesión se hizo una discusión general con todo el grupo. Los estudiantes podían intercambiar archivos y recibir retroalimentación de otros participantes. Para el análisis del trabajo de los estudiantes, escogimos un problema propuesto por un subgrupo. Este problema fue resuelto durante las últimas dos sesiones del seminario. Durante todo el análisis incluimos comentarios u observaciones para describir determinados comportamientos de los estudiantes que aparecieron durante esta implementación; sin embargo no tratamos de mostrar un análisis detallado de la transcripción de su trabajo. En lugar de eso, identificamos un conjunto de observaciones que ilustran las relaciones matemáticas que surgieron de la interacción de los estudiantes con el problema. En algunos casos, la participación del profesor jugó un rol importante al orientar la discusión de los estudiantes llevándolos finalmente a proponer y examinar esas relaciones.

Origen del problema

Una actividad importante que surgió durante las sesiones fue pedirle a los estudiantes que formularan sus propias preguntas o problemas. Así que durante la interacción de los estudiantes con los problemas o situaciones, podían explorar libremente las conexiones o cambiar los enunciados originales para examinar e ilustrar el comportamiento de otras relaciones. Un miembro de un subgrupo mencionó que para formular preguntas era importante identificar las propiedades básicas inherentes a las diferentes figuras. Por ejemplo:

- *¿Qué sabemos de los rectángulos?* Que tienen cuatro lados (dos pares de lados paralelos), lados perpendiculares, cuatro ángulos rectos, dos diagonales, un centro (intersección de las diagonales), atributos como área y perímetro y comprenden un par de triángulos rectángulos congruentes (Teorema de Pitágoras). Por supuesto, los estudiantes aceptaron que para poder representar el problema utilizando el software, era importante pensar en todas las figuras en términos de sus propiedades y luego seleccionar los comandos adecuados para lograr una representación particular.
- *¿Podemos construir un rectángulo si conocemos solamente su perímetro y una diagonal?* Esta fue una pregunta planteada por un estudiante a toda la clase. Del trabajo en este problema surgieron tres estrategias diferentes. Aunque en todas ellas el uso de la tecnología fue fundamental, nos centramos en identificar dos estrategias en las que el software funcionó como una herramienta poderosa no sólo para alcanzar la solución, sino también para explorar otras propiedades geométricas de las figuras.

Proceso de solución de tres subgrupos

¿Cómo representar el perímetro de manera geométrica? ¿Que información nos da el perímetro acerca de los lados del rectángulo? ¿Cómo se relaciona la información del perímetro con la diagonal? Estas son algunas de las preguntas iniciales discutidas en un subgrupo que llevaron a los estudiantes a representar la información básica y a utilizar el *software* de geometría dinámica para conectar esa información. Enseguida describimos las principales etapas:

1) Los estudiantes representaron el semi-perímetro como el segmento *AB* y escogieron un punto *Q* del mismo. Es decir, $a + b$ es la longitud del segmento *AB* donde a y b son las medidas de los lados del rectángulo. Con esta información construyeron el rectángulo *EHGF* (figura 1). En esta figura $a = m\overline{AQ} = m\overline{EH}$ y $b = m\overline{QB} = m\overline{HG}$.

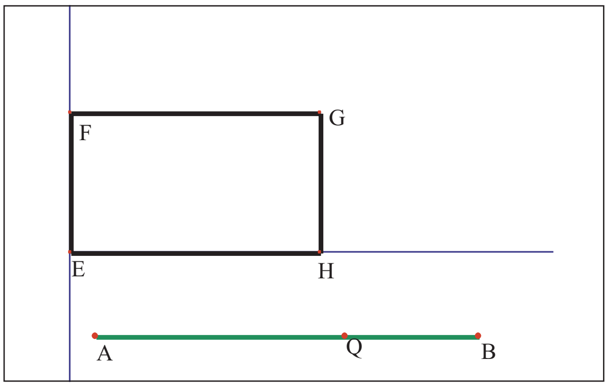


Figura 1

2) Se dieron cuenta de que moviendo el punto *Q* sobre el segmento *AB*, se generaba una familia de rectángulos de perímetro fijo. Decidieron encontrar el lugar geométrico del punto *G* cuando *Q* se mueve sobre $\overline{AB}$ (figura 2).

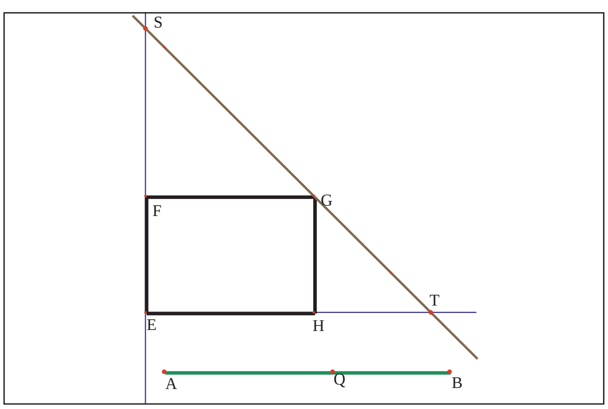


Figura 2

3. Encontraron que el lugar de puntos era el segmento *ST* y explicaron que cuando *Q* se desplaza hasta *B*, $\overline{ET}$ se convierte en el segmento *AB*. Igualmente, cuando *Q* coincide con A, el segmento *ES* se convierte en $\overline{AB}$. Es decir, notaron que el rectángulo que querían encontrar era uno de los rectángulos inscritos en el triángulo rectángulo *EST*. Finalmente se dieron cuenta de que el rectángulo podía dibujarse en dos posiciones diferentes excepto cuando se convertía en cuadrado (figura 3).

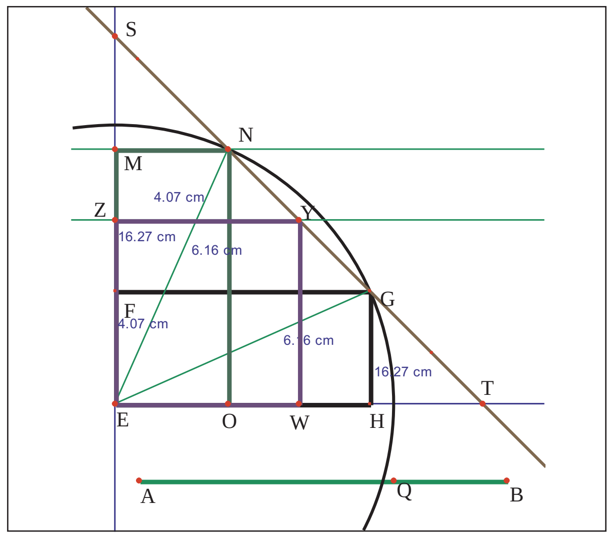


Figura 3

Otra estrategia escogida por dos subgrupos fue concentrarse en la representación algebraica de la situación. Es decir, usaron x e y para los lados de los posibles rectángulos y escribieron las siguientes ecuaciones:

$$y = -x + \frac{p}{2} \qquad p\text{: perímetro } D\text{: diagonal}$$

$$x^2 + y^2 = D^2$$

En ese momento, un estudiante sugirió graficar las dos ecuaciones, y dijo que ya que p y D eran números dados, entonces la primera ecuación representa una recta y la segunda una circunferencia. Utilizaron los siguientes procedimientos y representaciones:

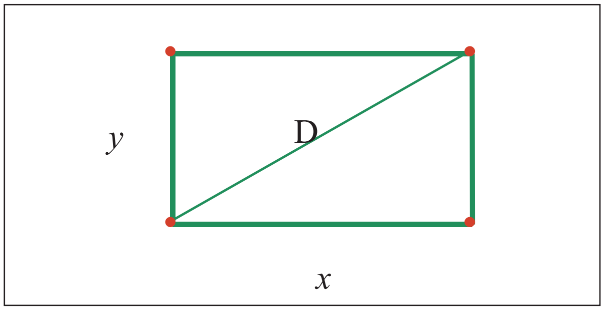


Figura 4

Aquí es importante mencionar que los estudiantes dedicaron un tiempo considerable a analizar los casos en los que no era posible construir el rectángulo. Finalmente la gráfica se convirtió en un referente para explicar la existencia de ese rectángulo (la intersección de la circunferencia y la recta puede ser un punto; en el caso del cuadrado, dos puntos, para una figura como la anterior; o ningún punto en cuyo caso no hay solución, como en la figura 5). El otro subgrupo que siguió esta estrategia dio una explicación algebraica sobre la solución del sistema de ecuaciones.

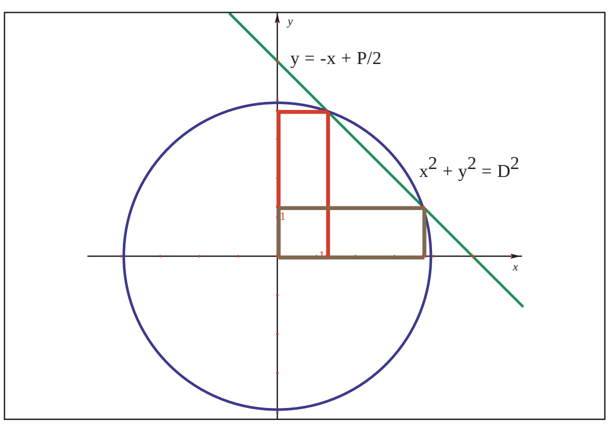


Figura 5

Otra estrategia fue construir una familia de triángulos con perímetro igual a la suma de los dos lados del rectángulo más la longitud de la diagonal. Escogieron la diagonal dada como un lado fijo del triángulo y los otros dos lados del triángulo como el semi-perímetro del rectángulo. El software se convirtió en una herramienta para encontrar la familia de triángulos con perímetro fijo (figura 6).

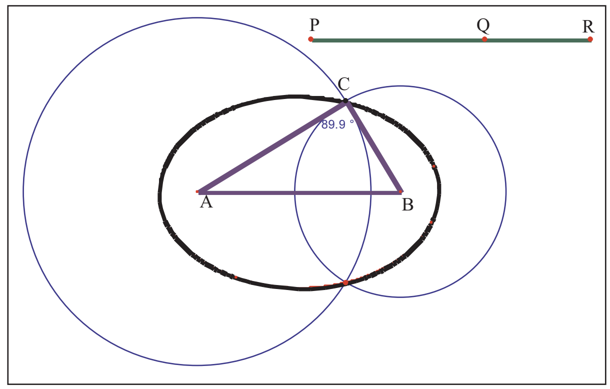


Figura 6

El segmento AB representa la diagonal dada y el segmento PR es el semi-perímetro. Los estudiantes dibujaron dos circunferencias, una de centro A y radio $\overline{PQ}$ y otra de centro B y radio $\overline{QR}$. Estas dos circunferencias se cortan en C. El lugar geométrico del punto C cuando Q se mueve sobre $\overline{PR}$ es una elipse (de focos A y B y constante m($\overline{PR}$)). Luego los estudiantes se concentraron en encontrar el triángulo con ángulo ACB recto. Para encontrarlo, dibujaron una circunferencia de centro el punto medio de la diagonal $\overline{AB}$ y radio la mitad de la diagonal. La intersección de la elipse y la circunferencia determina el vértice del triángulo rectángulo. En ese momento notaron que había casos en los que el ángulo ACB nunca sería recto. En este caso, se observa que no hay intersección entre la circunferencia y la elipse.

Cuando se discutieron estas soluciones con toda la clase, fue evidente que los estudiantes se dieron cuenta de que el uso del *software* era un medio para explorar el problema desde distintos ángulos y perspectivas. En particular, quedaron sorprendidos con la variedad de herramientas matemáticas y de ideas que se presentaron en cada estrategia. Al final de la sesión, un estudiante preguntó: ¿Podemos construir un rectángulo si tenemos la diagonal y el área (en lugar del perímetro)? Y los estudiantes estaban dispuestos a explorar la pregunta utilizando el *software*.

Observaciones

El trabajo mostrado por los estudiantes durante su interacción con el problema ilustra diferentes cualidades matemáticas de la tarea que les permitieron explorar las fortalezas y debilidades de sus estrategias de solución. Por ejemplo, la estrategia dinámica que utilizaron para encontrar el lugar geométrico del cuarto vértice les dio suficiente información para identificar todos los rectángulos de perímetro dado. En ese momento introdujeron la información de la diagonal para encontrar el rectángulo. La estrategia algebraica se basó en una representación estática de un caso particular con base en el que discutían otras posibilidades de comportamiento de las dos gráficas en términos de la intersección de las gráficas. La tercera estrategia en la que los estudiantes decidieron construir una familia de triángulos de perímetro fijo combina a la vez una representación parcial del rectángulo (el triángulo rectángulo) y el poder de la tecnología para encontrar todos los que tienen una base fija (la diagonal). Cuando los estudiantes movieron los puntos, encontraron distintos lugares geométricos, asignaron medidas y formularon y sustentaron conjeturas; quedó claro que el software se convirtió en una herramienta matemática poderosa para los estudiantes.

Referencias

Carpenter, P. T. & Lehrer, R. (1999). *Teaching and learning mathematics with understanding.* In E. Fennema & T. A. Romberg (Eds.), Mathematics classroom that promote understanding, pp.19-32. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

National Council of Teachers of Mathematics (2000*). Principles and standards for school mathematics*.

Romberg, T. A. & Kaput, J. J. (1999). *Mathematics worth teaching, mathematics worth understanding.* In E. Fennema & T. A. Romberg (Eds.), Mathematics classroom that promote understanding, pp. 3-17. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Santos, M. (1998). *On the implementation of mathematical problem solving: Qualities of some learning activities.* In E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld & J. Kaput (Eds.), Research in collegiate mathematics education. III, pp. 71-80. Washington, D.C.: American Mathematical Society.

La nueva matemática experimental

Luis Moreno Armella
CINVESTAV –IPN, México

Introducción

Para nadie es un secreto que *la demostración*, al estilo euclidiano, constituye el método de validación por excelencia de las proposiciones matemáticas. Esto es compatible con la tendencia hacia la abstracción que busca cristalizar, en un momento dado, las relaciones lógicas inherentes a los temas bajo estudio. Dichos temas suelen presentarse como un laberinto que requiere orden y sistematicidad. Quienes han tenido una experiencia matemática más o menos prolongada, aceptan estas afirmaciones con naturalidad, debido al contacto cotidiano con la metodología euclidiana. Sin embargo, esta actitud normativa tradicional ha empezado a cambiar ante el interés por el estudio de las *prácticas matemáticas*. Tales prácticas sugieren que la demostración se ubique para su adecuada interpretación en un escenario más amplio, a saber, el de las *pruebas y refutaciones*.

Tampoco es un secreto la tendencia hacia el logro de una comprensión intuitiva de los temas matemáticos, que procura un contacto inmediato con los objetos bajo estudio, una relación viva con ellos, por decirlo de alguna manera, que enfatice el significado concreto de sus relaciones.

La historia de las matemáticas, por lo menos en su vertiente occidental, atestigua la tensión entre dos puntos de vista: uno, que favorece los enfoques abstractos y otro, que favorece los enfoques intuitivos. Lo que ha resultado fértil para el desarrollo de las matemáticas, no es el predominio de una u otra de estas tendencias, sino su articulación. Gauss afirmaba en una ocasión*, ya tengo el resultado, pero aún me falta la demostración*. Viniendo de un matemático que hizo del rigor la marca de la casa, no puede dudarse que tenía claro que la práctica misma de la investigación matemática guardaba coincidencias notables con lo que ocurría en las ciencias experimentales: una exploración guiada por fuertes dosis de intuición, sometidas posteriormente a procesos de validación y comprobación. En el caso de las matemáticas, ese proceso de validación, *históricamente constituido*, es lo que llamamos *metodología euclidiana*.

Sobre la demostración y el rigor se ha escrito mucho a lo largo de la historia de la disciplina, prueba de que se trata de un centro nervioso de gran sensibilidad. La imagen social de la matemática refleja casi exclusivamente, la vertiente deductiva y de rigor. Esto es desafortunado desde el punto de vista educativo pues repercute en la forma como los docentes diseñan su trabajo pedagógico. Todo docente pone en juego su concepción de las matemáticas, explícita o implícitamente, cuando enseña y cuando evalúa a sus estudiantes. Y esta concepción, se modela, en principio, a partir de la imagen social de la disciplina.

Las matemáticas no son terreno exclusivo de los matemáticos como tales; los *modelos de uso* se manejan de acuerdo a los contextos de aplicación y a los significados derivados de ellos y no necesariamente según la sintaxis y reglas de los modelos teóricos. Como ejemplo, podemos recordar la manera como los infinitesimales han formado parte de los modelos de uso del cálculo de ingenieros y físicos, en épocas incluso en que dichos objetos no han tenido carta de ciudadanía en el mundo matemático oficial. Esto es, antes de la década de los sesenta, que fue cuando A. Robinson publicó su teoría del análisis infinitesimal.

En resumen, en las aplicaciones de las matemáticas a las ciencias, los modelos de uso siguen reglas de validación de acuerdo al contexto de significaciones que les son propios.

La didáctica de las matemáticas

Dado que nos interesa llevar las consideraciones anteriores al contexto educativo, conviene detenernos un momento en algunas componentes de una didáctica de las matemáticas.

La primera de estas componentes se refiere al papel que juega la epistemología en la constitución del cuerpo teórico de la didáctica. La otra consideración a la que vamos a referirnos, tiene que ver con la cognición.

Las reflexiones epistemológicas en el campo de la educación se pueden traducir, entre otros, en los siguientes puntos:

1) Análisis de los conceptos que funcionan en una disciplina.

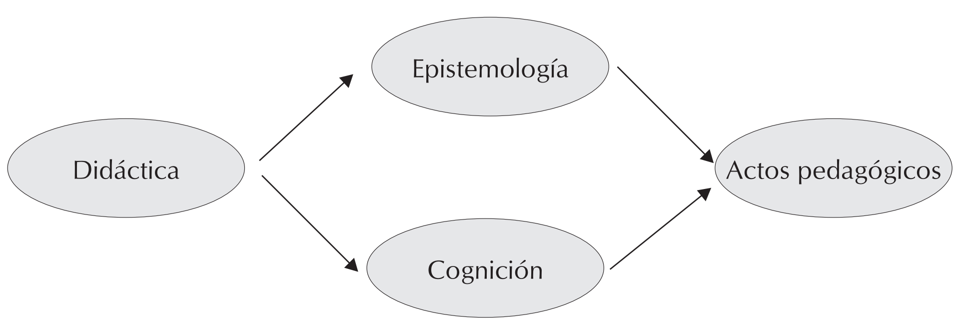
2) Estudio de las redes conceptuales que vinculan esos conceptos.

3) Análisis de la evolución del significado de los conceptos que se van produciendo a lo largo de su desarrollo histórico.

La componente cognitiva, por su parte, se refiere a los mecanismos de apropiación del conocimiento.

El estudio de los mecanismos de apropiación del conocimiento está estrechamente vinculado con el análisis epistemológico. A partir de su articulación podremos hablar de actos pedagógicos. *La didáctica es una teoría cuya práctica está constituida por actos pedagógicos.*

Hablar de la evolución histórica del significado de los conceptos matemáticos implica



que las matemáticas se conciban como una *actividad humana*. Como resultado de esta manera de concebir la disciplina, debe aceptarse que el rigor es una noción histórica, es decir, que va cambiando con las condiciones socioculturales de las sociedades en donde se produce el conocimiento que llamamos riguroso en determinado momento. Además, y esto es muy importante, los objetos matemáticos dejan de ser vistos como objetos ideales (ser platónicos es muy frecuente entre los matemáticos) y pasan a ser concebidos como *ideas compartidas*.

Un poco más sobre rigor y exploración

En la introducción hemos recordado cómo en el desarrollo de las matemáticas se han identificado con claridad dos tendencias: una, que promueve la formalización y el rigor, teniendo como piedra angular los procesos deductivos y las demostraciones euclidianas –es decir, aquellas que parten de hipótesis y resultados claros y se proponen, mediante la deducción, arribar a resultados nuevos. Los matemáticos profesionales comprenden muy bien que esta actividad formalizante del conocimiento sólo es posible una vez que se haya adelantado un trabajo exploratorio, guiado por la intuición y la imaginación de quien va delineando los resultados de acuerdo a una red personal de significados. El trabajo de exploración es un trabajo *situado* en un contexto. La formalización intenta descontextualizar los resultados transformándolos en esas proposiciones que denominamos *teoremas*.

No hace falta pensar mucho para convencerse que una acción pedagógica que pretenda partir del nivel de formalización –ignorando el examen epistemológico y su articulación con la cognición– no llegará muy lejos. Hay que partir pues, del nivel de la exploración. Ahora bien, hasta hace poco tiempo, los recursos con los que contaban los sistemas educativos para generar actividades de exploración se reducían prácticamente al lápiz y papel. Esto no es nada desdeñable, por cierto. Libros como los de Polya, por ejemplo, se han tornado clásicos y han impulsado un acercamiento a las matemáticas a través de lo que él ha llamado *razonamiento plausible*. Hoy en día, para nuestra fortuna contamos con un instrumento de la mayor importancia para la exploración matemática: la computadora. Con este nombre designaremos, genéricamente las computadoras personales y las calculadoras como la TI-92 que viene equipada con un CAS (un **S**istema **A**lgebraico **C**omputacional) y una versión de CABRI GÉOMÈTRE que permite exploraciones geométricas de amplio alcance. Para el estudiante de matemáticas (sin excluir a los profesores, bien entendido) una computadora bien puede entenderse como un laboratorio de matemáticas. Por ejemplo, la TI-92 permite el estudio de las sumas parciales de una serie. Consideremos la serie armónica:

$$\sum 1/n$$

Sabemos muy bien que dicha serie es divergente. Resulta anecdótico recordar las palabras de Abel, el genio noruego, al respecto de ella: *"La serie es divergente...es una vergüenza demostrar algo a partir de ella"*. Por su parte Heaviside, matemático aplicado se expresa así: *"La serie es divergente. Por lo tanto debe poder hacerse algo con ella"* (R. Young, 1992, p. 355). La anécdota nos hace pensar: henos aquí ante dos modos diametralmente opuestos de concebir un *resultado* matemático. Y esto es así porque Abel y Heaviside son dueños de visiones divergentes de las matemáticas. Bien sabemos que Abel está sumergido en el mundo del rigor deductivo (en el paradigma euclidiano) mientras que Heaviside, como matemático aplicado, orienta sus búsquedas a partir de los modelos de uso, de las interpretaciones contextuales de los hechos matemáticos. Ahora bien, **¿será cierto que no podamos decir nada interesante sobre la serie armónica?** Empecemos haciéndonos la pregunta:

¿Cuántos términos de la serie deben sumarse para que la suma rebase por primera vez al cinco?

Para abordar este problema usaremos la calculadora algebraica TI-92. En la notación de este instrumento, la suma parcial desde n=1 hasta k, se escribe así: $\sum(1/n,n,1,k)$. Entonces:

$\sum(1/n,n,1,82)$ = 4.99002007991, y por otra parte:

$\sum(1/n,n,1,83)$ = 5.00206827268.

La respuesta es pues 83. Este es el número mínimo de términos que deben sumarse en la serie armónica para que el valor de la suma parcial rebase al 5. Si denotamos con N_p el mínimo número de términos necesarios para que la suma parcial de la serie armónica rebase al número natural p, tenemos:

N_2 = 4 (2.083333...)
N_3 = 11 (3.019877...)
N_4 = 31 (4.0272451...)
N_5 = 83 (5.002068...)
N_6 = 227 (6.004366...)
N_7 = 616 (7.001274...)
N_8 =1674 (8.000485...)
N_9 = 4550 (9.000208...)

Entre paréntesis hemos colocado el correspondiente valor de la suma parcial. Ahora bien, trabajando con papel y lápiz, es posible aproximar, razonablemente, estos números. Pero la capacidad de amplificación algorítmica que se tiene cuando está a nuestra disposición una calculadora programable (como la TI-92) es considerable. Es posible tratar matemáticamente esta problema de una manera novedosa. Por ejemplo, es un problema nuevo pedir a los estudiantes la escritura de un programa que produzca los datos que hemos exhibido arriba. Pero lo interesante no termina allí. Si hacemos la división N_{p+1}/ N_p encontramos que:

(N_3/ N_2)= 2.75
(N_4/ N_3)= 2.818181...
(N_5/ N_4)= 2.6774193...
(N_6/ N_5)= 2.734939...
(N_7/ N_6)= 2.7136563...
(N_8/ N_7)= 2.7175324...
(N_9/ N_8)= 2.71804062...

Estos números (sobretodo si previamente se ha producido una lista más larga de los valores de N_p) permiten plantear una conjetura:

$$(N_{p+1}/ N_p) \longrightarrow e \ (p \longrightarrow \infty)$$

lo cual es información valiosa sobre la serie armónica. De modo que sí puede decirse algo interesante sobre la serie armónica.

Este ejemplo, que aquí sólo presentamos de manera muy simplificada, da lugar a una exploración muy interesante por parte de los estudiantes. Desde luego, todo esto depende de la *sensibilidad* del profesor, de la forma como plantee el problema a los estudiantes, en un ambiente de exploración matemática enriquecido mediante la presencia de estos nuevos instrumentos computacionales. Los experimentos numéricos pueden llegar a sugerir el teorema y la manera como se logra acceder a una demostración formal del resultado. Resulta psicológicamente más atractivo para el estudiante trabajar en la búsqueda de una justificación de la corrección de un resultado, que hacerlo en un ambiente donde se plantee el resultado de antemano y su trabajo consista en hallar una demostración. Este último enfoque, en un salón de clases, carece de creatividad.

Las preguntas pertinentes, en un ambiente rico en tecnología, son distintas a las que suelen formularse en un ambiente asistido sólo por papel y lápiz. Declaremos: esto no es un juicio de valor sobre las virtudes de un enfoque sobre otro. Se trata, mas bien, de entender que la *mediación* de una forma de tecnología impacta los contenidos del conocimiento que se va construyendo. En nuestro caso, en el salón de clases.

Matemática experimental

En un artículo reciente (Bailey & Borwein, 2001) hallamos la siguiente descripción:

> *La **matemática experimental**, es decir, la utilización de la tecnología computacional...con el propósito de explorar las estructuras matemáticas, de examinar conjeturas y sugerir generalizaciones...*

Un poco más adelante, en ese mismo artículo (p. 52), encontramos una interesante cita de Milnor, doblemente interesante debido al personaje:

> *Si puedo dar una demostración en abstracto de algo, me siento razonablemente satisfecho. Pero si puedo obtener una demostración concreta, computacional que me permita realmente generar una respuesta numérica, entonces quedo mucho más satisfecho. Soy una especie de adicto en lo referente al trabajo con la computadora porque nos proporciona criterios explícitos sobre lo que está ocurriendo. Mi pensamiento es visual y me satisface mucho si puedo ver un dibujo de aquello con lo que estoy trabajando.*

Quizás una de las consecuencias del trabajo experimental, tal como lo estamos tratando de describir aquí, se refiera al énfasis sobre una distinción esencial que se encuentra reiteradamente en las matemáticas: *la distinción entre los hechos matemáticos y las demostraciones matemáticas*. Mandelbrot ha escrito líneas realmente esclarecedoras sobre este tema. Por ejemplo, en el ensayo escrito para servir como introducción a la obra de Peitgen et al. (1992), añade:

> *Muchos distinguidos matemáticos insisten en que su campo... empieza con la demostración... esto puede ser debido a que se han ido acostumbrando a ver los nuevos hechos matemáticos casi exclusivamente a través de lo que sugieren las demostraciones de hechos matemáticos previos... pero, el desarrollo de las matemáticas descansa sobre muchas otras fuentes, como la observación y la experimentación.*

El enfoque experimental, como estrategia pedagógica, ha vuelto a ganar terreno. La disponibilidad de los instrumentos electrónicos de cálculo ha contribuido notablemente a ello. Además, la presencia de dichos instrumentos ha dado nueva vida a la *visualización* matemática. Esto corresponde al principio de mediación instrumental: *las características centrales de una forma de conocimiento están en íntima relación con los instrumentos que sirven como mediadores en el proceso de construcción de ese conocimiento*.

Ciertas ramas de las matemáticas se han desarrollado como respuesta a la imposibilidad de hallar, en determinado momento, respuestas explícitas a determinados problemas (Davis & Hersch, 1995). Por ejemplo, en el estudio de las series numéricas aceptamos como respuesta satisfactoria los criterios de convergencia en lugar del cálculo explícito del valor numérico de las sumas. A partir de resultados de esta naturaleza, se fueron modificando los propósitos iniciales, dando origen a ramas más cualitativas de las matemáticas. La transposición al campo de la enseñanza dio como resultado un enfoque pedagógico cuyo eje articulador resultó ser exageradamente formalista. La simplicidad cognitiva se equiparó a la simplicidad de la lógica formal.

Actualmente, a la luz de la potencia de los nuevos instrumentos computacionales, se puede reevaluar esta posición. No se trata, volvemos a insistir en ello, de abandonar los progresos incontestables de las matemáticas en su versión actual, sino de diseñar estrategias didácticas que respeten la epistemología de las matemáticas. Por ejemplo, no se puede cortar el hilo conductor que va de los *procesos* matemáticos a los *objetos* matemáticos.

La visualización perdió mucha credibilidad durante el siglo XIX; la geometría dejó de ser fuente de verdades matemáticas y su lugar lo ocupó la aritmética. Desde luego, las geometrías no-euclidianas no fueron ajenas a este proceso. El hecho es que la imagen fue desapareciendo de la escena y las matemáticas quedaron, cada vez más, identificadas con su versión analítica. Hay razones profundas para que las cosas hayan tomado estos rumbos. Pero la enseñanza de las matemáticas, una vez más, no reconoció las consecuencias negativas que una transposición mecánica podía tener sobre la educación matemática.

La visualización tiene mucho que ofrecer, de nuevo, a través de la computadora. No olvidemos, que *teorema* significa *"aquello que es objeto de una visión"* (Davis, 1993).

Una aventura matemática

Recientemente, el Profesor Yu Takeuchi ha narrado una interesante aventura matemática en la revista *Matemáticas: Enseñanza Universitaria,* vol. VIII (1-2), pp. 211-218, 2000. Allí narra sus encuentros con el problema de calcular la integral:

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1}\,dx$$

A la luz del contenido del presente ensayo, recomendamos enfáticamente la lectura del trabajo del Profesor Takeuchi, en particular sus reflexiones sobre el papel de las computadoras en la educación. A continuación vamos a presentar un acercamiento al cálculo de la integral anterior. Partimos de la idea: *la construcción del sentido, por parte del estudiante, es el objetivo principal de la enseñanza*. Esto no significa que ese sentido lo construya el estudiante al margen de su entorno social ni con independencia de sus textos. Tampoco con independencia de la influencia del profesor. Es, más bien, una labor de reconstrucción y apropiación del conocimiento.

El sistema simbólico de la calculadora TI-92 (una versión de Derive) no puede dar la respuesta que el Profesor Takeuchi obtuvo con la ayuda del Profesor Rincón:

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1}\,dx = \pi^4/15.$$

Tal como nos cuenta, el recurso computacional para obtener este resultado fue **Mathematica**. ¿Qué podemos hacer entonces con nuestra calculadora? Lo primero que se le ocurre a un profesor cuando observa la integral en cuestión es: *¿qué significa esa inte-*

gral?, ¿cómo hacer que el cálculo de esa integral sea una actividad significativa para un estudiante?

Calcularla no puede reducirse a un ejercicio sintáctico, por complejo que este pueda ser. El virtuosismo sintáctico hizo de muchos de mis colegas estudiantes *buenos para las matemáticas*, entendiendo con esta expresión el que eran muy hábiles en el manejo de la tabla de logaritmos —sin necesidad de entender, en muchos casos, las funciones de la característica y la mantisa, que hoy parecen haber desaparecido del mapa escolar.

Las imágenes que aparecerán de aquí en adelante, están tomadas de la pantalla de la TI-92. Primero, realicemos algunos cálculos relacionados con la integral en cuestión. Por ejemplo, la integral entre 0 y 100 (figura 1):

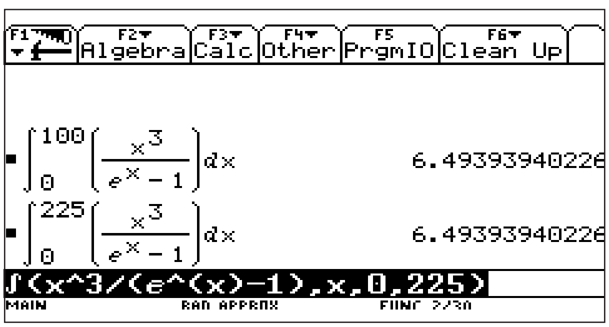


Figura 1

Como puede apreciar el lector, en la línea inferior es donde se introduce la información que debe ser procesada por la calculadora. En la parte superior de la pantalla, aparece, a la izquierda, la notación usual de la integral y a la derecha el valor numérico de dicha integral. Parece que no hay mucha diferencia entre realizar la integración hasta 100 o hasta 225... ¿dónde podremos hallar una explicación de este hecho? Proponemos que en la gráfica de la función. Un objeto matemático es susceptible de ser representado de muchas formas. Cada una de ellas tiene un mensaje particular para quien estudia dicho objeto. Vamos a introducir a la calculadora la función, como la primera de la lista (figura 2).

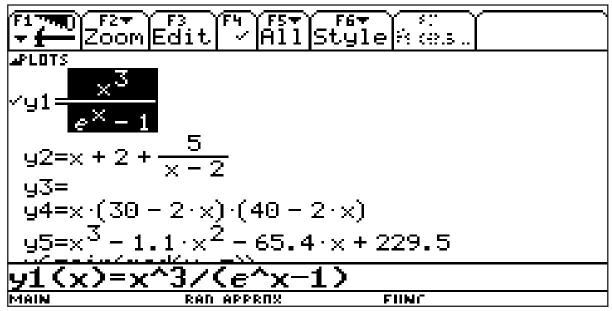


Figura 2

Para graficar la función debemos fijar una ventana de graficación: esto es clave cuando se pretende introducir el tema de graficación con el auxilio de la calculadora. La función es positiva en el intervalo de 0 a 100 y su máximo valor allí lo toma en x = 2.82143936278 (figura 3).

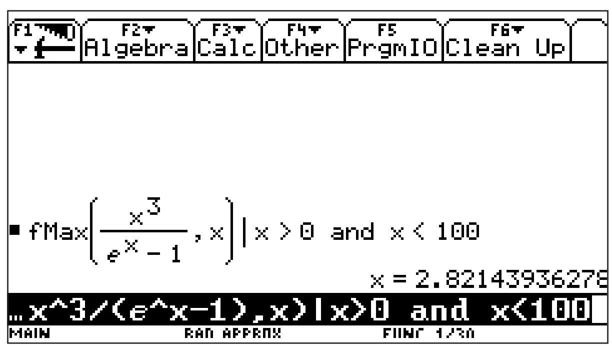


Figura 3

El valor máximo de la función es: 1.4214... de manera que podemos darnos una buena idea de la gráfica si empleamos la ventana determinada por los valores:

`xmin=`0, `xmax=`10, `ymin=-`.2, `ymax=`1.5.

La gráfica que se obtiene corresponde a la figura 4.

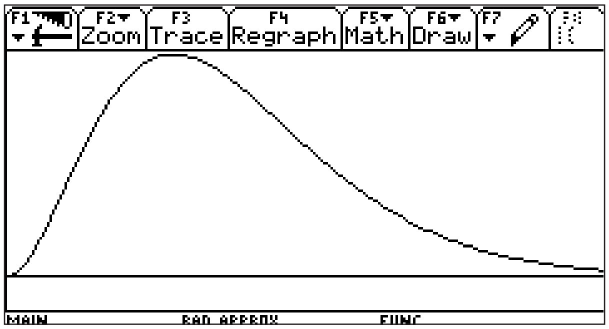


Figura 4

Se ve pues, que la parte sustancial de la integral (donde la integral está *concentrada*) está contenida en un intervalo de la forma $[0,M]$ en donde M es razonablemente *pequeño*. De modo que podemos preguntarnos: cómo tomar M para que el valor de la integral de 0 hasta M coincida con las doce primeras cifras decimales de $\pi^4/15$?

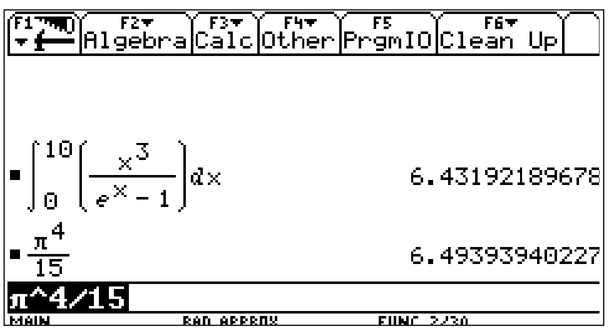


Figura 5

La pantalla de la figura 5 muestra que integrar hasta 10 no produce una buena aproximación al valor de $\pi^4/15$. Es decir, $M = 10$ no es "razonablemente" pequeño aún: más bien, es muy pequeño. Debemos tomar valores de M mayores que 10. Tomemos M=50. En ese caso, ya tenemos una aproximación hasta las primeras once cifras decimales, tal como muestra la figura 6.

Pero ahora, con la contextualización del problema, gracias a los recursos de visualización

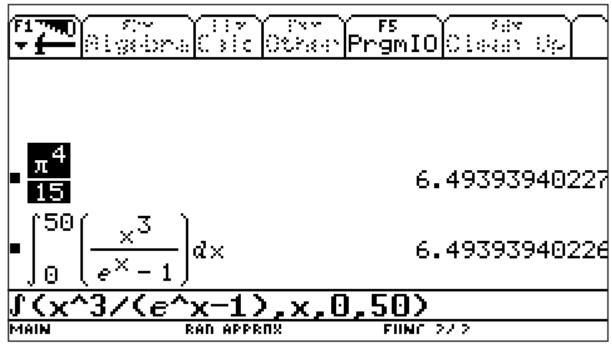


Figura 6

que ha prestado la calculadora, sabemos interpretar el resultado. Basta tomar un valor de M un poco mayor que 50, digamos M=80 para obtener 6.49393940227 (figura 7).

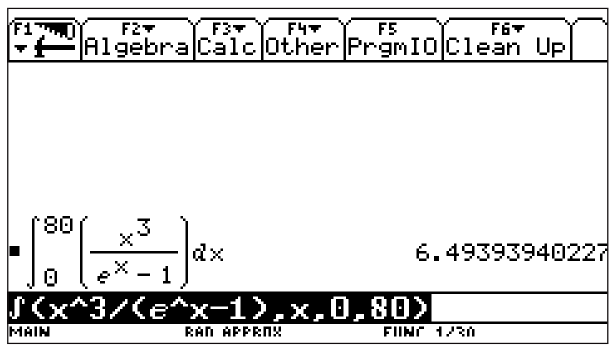


Figura 7

Resultado que ya coincide con $\pi^4/15$ hasta la última cifra decimal que apreciamos en la pantalla. Recurriendo a la imagen geométrica, esto significa que la integral desde 80 hasta ∞ debe contribuir con *muy poco* al valor de la integral desde cero hasta infinito. No puede dejarse pasar por alto la analogía con lo que ocurre con la *cola de las series*. Estas son las oportunidades que el profesor debe aprovechar para dinamizar la red conceptual del estudiante. Para *despertar* esos *teoremas en acto* que luego serán objeto de una mayor formalización. Para terminar, calculemos la integral entre 80 y 200 (figura 8).

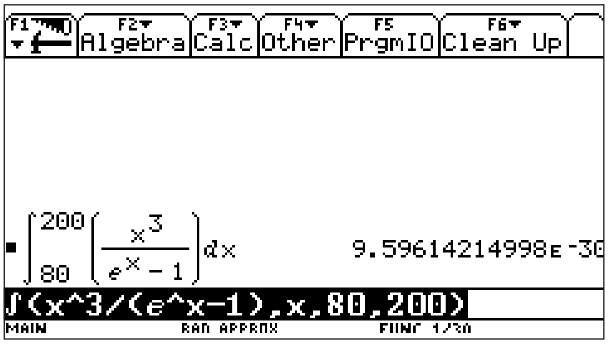


Figura 8

El valor numérico, como puede apreciarse, es casi insignificante (del orden de 10 a la potencia –30). Nos parece que una actividad planeada de esta manera (aquí sólo hemos querido sugerir una manera de llevarla a cabo, seguramente hay formas más inteligentes de realizarla) permite al estudiante construir un sentido para el problema propuesto y con una conducción prudente del profesor podrá arribar al problema tal como el Profesor Takeuchi lo presentó a sus lectores.

Introductio in Analysin Infinitorum

Bajo este título, Euler publicó en 1748 un libro que marcaría una época. Un libro que ha sido llamado *el libro fundacional del análisis*. Vale la pena citar lo que de él ha dicho Boyer en su artículo, *The Foremost Textbook of Modern Times* reproducido en la obra *Selected papers on calculus,* editada por T. Apostol en (1969).

Dice Boyer:

> *...pero sobre todos estos bien conocidos libros de texto, se alza otro, un libro que aparece justo en la mitad de esta época pródiga en grandes textos y con el que prácticamente todos los autores posteriores admiten tener una deuda. Se trata de la Introductio de Euler... Con él, Euler llevó a cabo lo que Euclides y Al-Khowarizmi habían hecho con la geometría sintética de los griegos y el álgebra elemental, respectivamente. El concepto de función y los procesos infinitos habían surgido durante el siglo XVII, pero fue la Introductio la que los elevó al grado de tercer miembro del triunvirato matemático compuesto por geometría, álgebra y análisis".*

Ya desde 1734, Euler había resuelto un problema propuesto por Johann Bernoulli, con relación a la serie de los recíprocos de los cuadrados de los naturales. Bernoulli había logrado saber que la serie era convergente y que su suma era menor que 2. Pero él quería saber, con exactitud, el valor de la suma. Euler resolvió este problema y su método se constituyó en el alma de su obra *Introductio*, de la que hemos dicho unas palabras anteriormente. El resultado de Euler viene inscrito en la calculadora (figura 9):

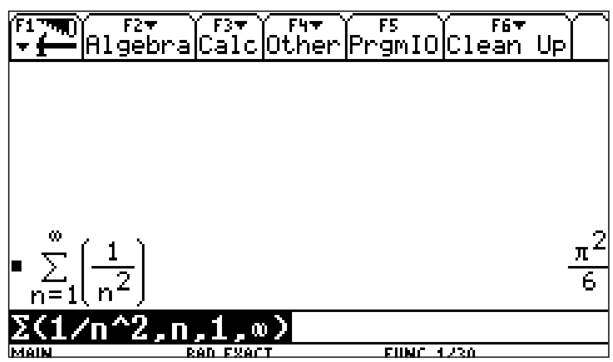


Figura 9

La pregunta es: ¿Cómo lo encontró? La respuesta de Euler no fue inmediata. Primero, hizo lo que había aprendido a realizar como un maestro: experimentar, buscar analogías, inducir el resultado. Y después de todo ello, intentar alcanzar un nivel de justificación superior. A continuación describiremos a grandes rasgos su método. En las referencias Bressoud (1994); Dunham (1990); y Young

(1992), el lector podrá encontrar más información sobre los cálculos de Euler.

Se parte de la función $\frac{sen(x)}{x}$ cuyo desarrollo en serie de potencias era conocido por Euler. Este desarrollo lo interpreta como un polinomio de grado infinito:

$$1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\cdots$$

cuyas raíces son todas de la forma $m\pi$ donde m es un entero distinto de cero.

Cuando un polinomio tiene todas sus raíces $a_1, a_2, \ldots a_n$, distintas entre sí y ninguna es cero, entonces se puede expresar en la forma:

$$A_0(1-\frac{x}{a_1})(1-\frac{x}{a_2})\cdots(1-\frac{x}{a_n})$$

donde A_0 es el término constante del polinomio. Continuando con su analogía, Euler factoriza el polinomio de grado infinito y obtiene:

$$(1-\frac{x^2}{\pi^2})(1-\frac{x^2}{4\pi^2})(1-\frac{x^2}{9\pi^2})\cdots$$

ya que las raíces vienen en pares que difieren en su signo. Posteriormente, Euler efectúa las multiplicaciones indicadas en este producto infinito e iguala el coeficiente correspondiente a x^2 con el coeficiente correspondiente en la serie de potencias de $\frac{sen(x)}{x}$

obteniendo en consecuencia:

$$\frac{1}{6}=\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{4\pi^2}+\frac{1}{9\pi^2}+\cdots$$

de donde obtiene su resultado.

Euler comprendía muy bien la audacia del método que lo había conducido a su solución. Unos diez años más tarde, escribió: *"El método empleado era nuevo y nunca había sido usado con esos propósitos"* (Polya, 1954). A pesar de las objeciones, empero, Euler tenía razones para confiar en la certeza de su resultado. Para empezar, los valores numéricos de las sumas parciales de la serie así lo indicaban (figura 10).

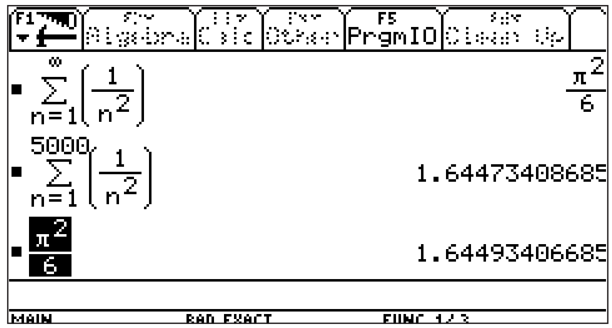


Figura 10

Además de la evidencia numérica, Euler buscó un refuerzo en las consecuencias que tenía su método: si en la fórmula del producto infinito,

$$(1-\frac{x^2}{\pi^2})(1-\frac{x^2}{4\pi^2})(1-\frac{x^2}{9\pi^2})\cdots$$

sustituímos x por $\pi/2$, obtenemos:

$$(\frac{1}{2}\frac{3}{2})(\frac{3}{4}\frac{5}{4})(\frac{5}{6}\frac{7}{6})$$

que es el conocido producto infinito de Wallis, publicado en su *Arithmetica infinitorum* de 1655. Euler no se detuvo allí. Comparó los siguientes coeficientes del polinomio de grado infinito con los correspondientes del desarrollo explícito del producto infinito y obtuvo de allí la identidad:

$$\frac{\pi^4}{90} = 1 + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{3^4} + \cdots$$

De nuevo, la evidencia numérica venía al rescate del resultado (figura 11).

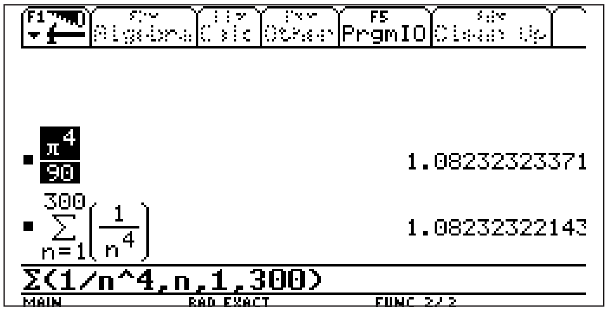


Figura 11

Conclusiones

Los resultados presentados en las dos secciones precedentes aparecen tratados tanto en el escrito ya citado del Profesor Takeuchi, como en la solución presentada en la misma revista por el Profesor Augusto Silva. Sin embargo, el acceso a teoremas como el teorema de la convergencia dominada, la función gamma de Euler, la función zeta de Riemann, imponen al lector ciertas condiciones que eventualmente harían muy escasos a los lectores de un tema tan interesante como el que ellos han tratado en sus escritos respectivos. Desde luego, no intento con ello criticar su trabajo. Me he propuesto, más bien, complementarlo. La historia de las matemáticas (no las vidas de los matemáticos) debe ser uno de los temas del conocimiento de los profesores de matemáticas. Allí se encuentran ejemplos interesantes de procesos de exploración, de pruebas y refutaciones etc. que indican claramente cómo eso que llamamos *rigor* matemático es resultado de la evolución histórica de la disciplina. Contribuye a disipar la niebla metafísica que alimenta la creencia de que las matemáticas son universales a priori. En lugar de ello, muestra con claridad meridiana que las matemáticas son una actividad humana. Que los objetos de las matemáticas son objetos conceptuales que deben su existencia al hecho que son *ideas compartidas* por personas y que sin ellas, no existirían.

En la actualidad, el profesor está en posibilidades de incorporar a la enseñanza de las matemáticas un instrumento que se lleva muy bien con la historia de la disciplina. Nos referimos, desde luego, a los instrumentos computacionales en sus diversas modalidades. Pueden iluminar la historia, convirtiéndose en amplificadores y pueden preparar el terreno en el salón de clases de hoy, para alcanzar una reorganización conceptual de las matemáticas escolares. Esto he tratado de sustentarlo en las primeras secciones del presente trabajo.

Referencias

Apostol, T. (Ed.) (1969). *Selected papers on calculus*. Washington D.C.: MAA.

Bailey, D. & Borwein, J. (2001). *Experimental Mathematics: Recent development and future outlook*. En B. Engquist y W. Schmid (eds), Mathematics unlimited-2001 and beyond. Springer-Verlag.

Bressoud, D. (1994). *A Radical Approach to Real Analysis*. Washington: MAA.

Davis, P. J. y **Hersch, R.** (1995). *The Mathematical Experience*. Study Edition. Boston: Birkhäuser.

Davis, P. J. (1993). *Visual Theorems*. Educational Studies in Mathematics, 24, pp. 333-344.

Dunham, W. (1990). *Journey Through Genius: The Great Theorems of Mathematics*. New York: Wiley Science Editions.

Peitgen, H. *et al.* (1992). *Fractals for the Classroom*, Part One. New York: Springer-Verlag.

Polya, G. (1954). *Induction and Analogy in Mathematics*. Princeton: Princeton University Press.

Young, R. (1992). *Excursions in Calculus: an interplay of the continuous and the discrete*. Dolciani Mathematical Expositions Number 13. Washington: MAA.