

PROYECTO  
INCORPORACIÓN DE NUEVAS TECNOLOGÍAS  
AL CURRÍCULO DE MATEMÁTICAS  
DE LA EDUCACIÓN MEDIA DE COLOMBIA  
FASE PILOTO

## **Memorias del Seminario Nacional**

# **Formación de Docentes sobre el Uso de Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas**

*FRANCISCO JOSÉ LLOREDA MERA*  
Ministro de Educación Nacional

*MARGARITA MARÍA PEÑA BORRERO*  
Viceministra de Educación

*BERNARDO RECAMÁN SANTOS*  
Director de Calidad de la Educación  
Preescolar, Básica y Media

**PROYECTO**

**INCORPORACIÓN DE NUEVAS TECNOLOGÍAS AL CURRÍCULO DE MATEMÁTICAS  
DE LA EDUCACIÓN MEDIA DE COLOMBIA**

*ANA CELIA CASTIBLANCO PAIBA*  
Coordinadora General del Proyecto

*LUIS MORENO ARMELLA*  
Asesor Internacional  
CINVESTAV – IPN, México

**EDITOR**

Ministerio de Educación Nacional  
Dirección de Calidad de la Educación Preescolar, Básica y Media

**Grupo responsable**

Ana Celia Castiblanco Paiba  
Luis Enrique Moreno Armella  
Fabiola Rodríguez García  
Martín Eduardo Acosta Gempeler  
Leonor Camargo Uribe  
Ernesto Acosta Gempeler

Diseño, Diagramación, Prerensa digital, Impresión y Terminados:  
ENLACE EDITORES LTDA.

Primera Edición: 5.000 ejemplares

ISBN: 958-97013

Prohibida su Reproducción total o parcial sin autorización escrita del  
Ministerio de Educación Nacional – MEN  
Derechos Reservados

DISTRIBUCIÓN GRATUITA. PROHIBIDA SU VENTA.

Impreso en Colombia

Bogotá, D.C., Colombia  
Diciembre 2001 – Enero 2002

# Instituciones participantes

## Departamentos, Universidades, Municipios y Colegios participantes en la Fase Piloto

Departamento/Unidad coordinadora	Institución educativa. Municipio
<b>Antioquia</b> Universidad de Antioquia	Escuela Normal Superior. Envigado Normal Superior María Auxiliadora. Copacabana Colegio Santa Teresa. Medellín Liceo Comercial Pacho Luis Álvarez Correa. Caldas
<b>Atlántico</b> Universidad del Norte Secretaría de Educación Departamental	Escuela Normal Superior de Santa Ana. Baranoa Normal Superior La Hacienda. Barranquilla Escuela Normal Superior Mixta. Manatí Normal Superior de Nuestra Señora de Fátima. Sabanagrande Instituto Pestalozzi. Barranquilla
<b>Bogotá</b> Universidad Distrital Francisco José de Caldas Universidad Pedagógica Nacional Ministerio de Educación Nacional	Unidad Básica Rafael Uribe Uribe, J.M. Externado Nacional Camilo Torres, J.M. Colegio Distrital Heladia Mejía, J.M. Colegio Distrital Rodrigo Lara, J.T. Colegio Distrital República de Costa Rica, J.M. Colegio Distrital Benjamín Herrera, J.M. Instituto Pedagógico Nacional Colegio Distrital General Santander, J.T.
<b>Boyacá</b> Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. Tunja	Escuela Normal Superior Santiago de Tunja. Tunja Instituto Integrado Nacionalizado Silvino Rodríguez. Tunja Instituto Técnico Rafael Reyes. Duitama Colegio Nacional Sugamuxi. Sogamoso
<b>Caquetá</b> Universidad de la Amazonia	Colegio Nacional La Salle. Florencia Colegio Departamental Juan Bautista de la Salle. Florencia
<b>Cesar</b> Universidad Popular del Cesar Secretaría de Educación Departamental	Escuela Normal Superior María Inmaculada. Manaure Colegio Manuel Germán Cuello Gutiérrez. Valledupar Colegio Nacional Loperena. Valledupar
<b>Córdoba</b> Universidad de Córdoba	Escuela Normal Superior. Montería Normal Superior Lácides Iriarte. Sahagún Colegio Marcelino Polo. Cereté

<b>Departamento/Unidad coordinadora</b>	<b>Institución educativa. Municipio</b>
<b>Cundinamarca</b> Ministerio de Educación Nacional	Instituto Técnico Industrial. Tocancipá
<b>Guajira</b> Secretaría de Educación Departamental	Colegio Nacionalizado Helión Pinedo Ríos. Riohacha Colegio Departamental Livio Reginaldo Fishioni. Riohacha Escuela Normal Superior. San Juan del Cesar
<b>Magdalena</b> Universidad del Magdalena	Normal Nacional Mixta. Santa Marta Normal de Señoritas. Santa Marta Liceo Antonio Nariño. Santa Marta Colegio de Bachillerato de Bonda. Santa Marta
<b>Nariño</b> Universidad de Nariño	INEM Mariano Ospina Rodríguez. Pasto Colegio Ciudad de Pasto. Pasto Liceo Central Femenino. Pasto
<b>Putumayo</b> Secretaría de Educación Departamental	Colegio Alvernia. Puerto Asís Colegio Pio XII. Mocoa
<b>Quindío</b> Universidad del Quindío	Instituto Técnico Industrial. Armenia Instituto Circasia. Circasia Colegio Los Fundadores. Montenegro Liceo Universitario. Armenia
<b>Risaralda</b> Universidad Tecnológica de Pereira	Instituto Técnico Superior. Pereira Normal Superior de Risaralda. Pereira
<b>Santander</b> Universidad Industrial de Santander	INEM Custodio García Rovira. Bucaramanga Centro Educativo Las Américas. Bucaramanga
<b>Sucre</b> Universidad de Sucre	Colegio Departamental de Bachillerato Antonio Lenis. Sincelejo Liceo Carmelo Percy Vergara. Corozal
<b>Tolima</b> Universidad del Tolima	Instituto Técnico Industrial Jorge Eliécer Gaitán Ayala. Líbano Colegio Nuestra Señora de las Mercedes. Icononzo Colegio Nacional San Simón. Ibagué Escuela Normal Integrada. Ibagué
<b>Valle</b> Universidad del Valle	Colegio Joaquín de Caicedo y Cuero. Cali Normal Superior Farallones. Cali Colegio Mayor de Yumbo. Yumbo Colegio Manuel María Mallarino. Cali

# Agradecimientos

*La Dirección de la Calidad de la Educación Preescolar, Básica y Media del Ministerio de Educación expresa sinceros agradecimientos a:*

- *Las Universidades, Instituciones Educativas y Docentes participantes en la Fase Piloto del Proyecto, por:*
  - ♦ *el compromiso con el que han asumido sus responsabilidades en los distintos departamentos*
  - ♦ *el apoyo académico y acompañamiento permanente*
  - ♦ *las acciones que han emprendido a favor de la disseminación de la cultura informática en el ámbito educativo*
  - ♦ *la apropiación del proyecto, liderando acciones regionales que amplían la cobertura del mismo*
  - ♦ *la adecuación de la infraestructura física, administrativa y académica para ponerlo en marcha*
  - ♦ *el tiempo, la dedicación, el trabajo y la experiencia dedicados, rebasando las expectativas del mismo*
- *Los estudiantes de las instituciones piloto por su entusiasmo e interés y por reflejar con sus actuaciones la pertinencia e importancia del Proyecto*
- *Los doctores Luis Moreno Armella y Luz Manuel Santos Trigo, investigadores del CINVESTAV - IPN, México, por sus aportes y colaboración para hacer realidad estas memorias.*
- *El doctor Alejandro Otálora Galvis, asesor del Ministro de Educación en el Programa Ley 21, por su gestión y apoyo al proyecto.*



# Contenido

Instituciones participantes . . . . .	VII
Agradecimientos . . . . .	IX
Introducción . . . . .	XIX
Presentación . . . . .	XXIV

## Capítulo 1 Primer Seminario Nacional de Formación de Docentes en el Uso de la Tecnología

Manual introductorio de la calculadora TI-92 <i>Martín Eduardo Acosta Gempeler</i> . . . . .	3
Introducción al programa de geometría Cabri Géomètre <i>Martín Eduardo Acosta Gempeler</i> . . . . .	6
Lugares geométricos <i>Martín Eduardo Acosta Gempeler</i> . . . . .	10
Macro construcciones y cajas negras en el programa de geometría <i>Martín Eduardo Acosta Gempeler</i> . . . . .	13
Construcciones dinámicas en el programa Cabri Géomètre <i>Martín Eduardo Acosta Gempeler</i> . . . . .	17
Modelación en geometría <i>Martín Eduardo Acosta Gempeler</i> . . . . .	19
¿Qué es el número e? <i>Martín Eduardo Acosta Gempeler</i> . . . . .	23
Solución de un sistema de ecuaciones en el programa de álgebra y cálculo <i>Martín Eduardo Acosta Gempeler</i> . . . . .	26
Regresión lineal <i>Martín Eduardo Acosta Gempeler</i> . . . . .	29
Actividades en sistemas numéricos <i>Hugo Martín Cuéllar García</i> . . . . .	32
Datos agrupados. Trabajo con el paquete de estadística <i>Edwin Alfredo Carranza Vargas</i> . . . . .	35



Fundamentación cognitiva del currículo de matemáticas	
<i>Luis Moreno Armella, Guillermina Waldegg</i> . . . . .	40
Evolución y tecnología	
<i>Luis Moreno Armella</i> . . . . .	67
Instrumentos matemáticos computacionales	
<i>Luis Moreno Armella</i> . . . . .	81
Cognición y computación: el caso de la geometría y la visualización	
<i>Luis Moreno Armella</i> . . . . .	87
Calculadoras algebraicas y aprendizaje de las matemáticas	
<i>Luis Moreno Armella</i> . . . . .	93
La construcción del espacio geométrico, un ensayo histórico-crítico	
<i>Luis Moreno Armella</i> . . . . .	99
Graficación de funciones	
<i>Luis Moreno Armella</i> . . . . .	110
Ideas geométricas del currículum presentadas mediante el Cabri Géomètre	
<i>Luis Moreno Armella</i> . . . . .	141
Problematizar el estudio de las matemáticas: un aspecto esencial en la organización del currículum y en el aprendizaje de los estudiantes	
<i>Luz Manuel Santos Trigo</i> . . . . .	151
Problematizar el estudio de las matemáticas: un aspecto esencial en la organización del currículum y en el aprendizaje de los estudiantes	
<i>Luz Manuel Santos Trigo</i> . . . . .	151
Cualidades y procesos matemáticos importantes en la resolución de problemas: un caso hipotético de suministro de medicamento	
<i>Fernando Barrera Mora y Luz Manuel Santos Trigo</i> . . . . .	166
Un problema de variación	
<i>Luz Manuel Santos Trigo</i> . . . . .	186

## Capítulo 2

### Artículos sobre tecnología

Educación matemática: investigación y tecnología en el nuevo siglo	
<i>Teresa Rojano C. y Luis Moreno Armella</i> . . . . .	194
La epistemología genética: una interpretación	
<i>Luis E. Moreno Armella</i> . . . . .	203
Weierstrass: cien años después	
<i>Luis Moreno Armella</i> . . . . .	222
La epistemología constructivista y la didáctica de las ciencias: ¿coincidencia o complementariedad?	
<i>Luis E. Moreno Armella, Guillermina Waldegg</i> . . . . .	234

Tecnología y representaciones semióticas en el aprendizaje de las matemáticas <i>Jose Luis Lupiáñez y Luis E. Moreno Armella</i> . . . . .	248
La demostración en perspectiva <i>Luis Moreno Armella</i> . . . . .	257
Proceso de transformación del uso de tecnología en herramienta para solucionar problemas de matemáticas por los estudiantes <i>Luis Moreno Armella y Manuel Santos Trigo</i>  <i>Traducido por Martín Eduardo Acosta Gempeler</i> . . . . .	263
La nueva matemática experimental <i>Luis Moreno Armella</i> . . . . .	269

**Capítulo 3**  
**Talleres para apoyar el seguimiento**

Guía para el análisis de actividades con calculadora <i>Ana Celia Castiblanco Paiba, Fabiola Rodríguez García y Martín Eduardo Acosta Gempeler</i>	282
Guía para una actividad con el CBL <i>Martín Eduardo Acosta Gempeler y Fabiola Rodríguez García</i> . . . . .	283
Exploraciones numéricas <i>Luis Moreno Armella</i> . . . . .	288
Modelos de regresión <i>Luis Moreno Armella</i> . . . . .	297

**Capítulo 4**  
**Curso de profundización en el manejo didáctico de la tecnología  
y diseño de actividades**

Problemas de exploración geométrica <i>Martín Eduardo Acosta Gempeler</i> . . . . .	312
Simulación de un problema geométrico: volumen de un prisma <i>Martín Eduardo Acosta Gempeler</i> . . . . .	314
Simulación de un problema geométrico: la hoja doblada <i>Martín Eduardo Acosta Gempeler</i> . . . . .	317
Simulación de movimiento. El problema de los aviones <i>Martín Eduardo Acosta Gempeler y Fabiola Rodríguez García</i> . . . . .	319
Medición de ángulos y simulación <i>Martín Eduardo Acosta Gempeler</i> . . . . .	323
Simulación en Cabri Géomètre del tiro parabólico <i>Martín Eduardo Acosta Gempeler, Ernesto Acosta Gempeler y Juan Pablo Acosta Arreaza</i> . . . . .	326

Geometría lógica o construcciones condicionales, una idea de Yves Martin <i>Martín Eduardo Acosta Gempeler</i> . . . . .	330
Exploración de la composición de transformaciones isométricas <i>Martín Eduardo Acosta Gempeler</i> . . . . .	333
Taller con el CBR - Caída libre <i>Fabiola Rodríguez García</i> . . . . .	334
Sucesiones y series <i>Fabiola Rodríguez García</i> . . . . .	336

# Presentación

Las sociedades contemporáneas dependen, para su desarrollo, de sus capacidades para producir, aplicar y transmitir el conocimiento científico y tecnológico. Estar en posesión de tales capacidades conlleva la producción de recursos humanos con una amplia y variada formación científica y humanística, pues estas capacidades no son trasladables de una sociedad a otra, como sí lo son los bienes de consumo materiales.

En nuestro país esta meta no será posible sino a través del diseño y la articulación de un nuevo proyecto educativo nacional. El sistema educativo colombiano tiene entre sus grandes desafíos modificar las estructuras curriculares, organizadas hoy en día a partir de contenidos temáticos y centradas en el trabajo de papel y lápiz, hacia la búsqueda del desarrollo intelectual que incorpore las tecnologías informáticas con miras a fortalecer las actividades cognitivas.

Los educadores de hoy tenemos que proporcionar a las futuras generaciones herramientas que le permitan enfrentarse a la resolución de problemas, no sólo en el ámbito escolar sino en sus posibles lugares de trabajo, en donde la creatividad y la innovación serán la moneda de cambio. Tenemos el reto de proporcionarles instrumentos de aprendizaje, es decir, estructuras cognitivas con alto grado de adaptación a lo nuevo.

La sociedad del conocimiento reclama del sistema educativo personas creativas, con espíritu crítico, con capacidad para pensar,

para aprender a aprender y para trabajar en equipo, conscientes de sus propias capacidades y que además de tener unos profundos conocimientos en un área determinada tengan una visión general de los diferentes problemas que afectan a la sociedad actual.

Para tener éxito en esta empresa es fundamental el compromiso de los educadores con la autoformación, pues los cambios a que nos vemos abocados requieren romper con las formas como posiblemente fuimos educados y comencemos a buscar alternativas diferentes, que hagan uso de las nuevas tecnologías. Los profesionales de la educación tenemos una gran responsabilidad frente a las expectativas de cambio social, debemos afrontar nuevas políticas educativas, diversas realidades curriculares y diferentes realidades sociales y culturales para entrar en consonancia con los retos que la sociedad nos demanda

En este sentido el Ministerio de Educación Nacional ha venido aunando esfuerzos con la comunidad educativa para impulsar proyectos de formación de docentes que apuntan a la construcción de un nuevo currículo escolar. El proyecto “Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Media de Colombia” responde a estas expectativas al formular entre sus objetivos la consolidación de una comunidad educativa comprometida con la diseminación de la cultura informática en la escuela como una estrategia para el mejoramiento de la calidad de la educación matemática en el país.

El presente trabajo contiene las Memorias del fruto del proceso de formación de docentes realizado en la fase piloto del proyecto y se constituye en una fuente bibliográfica valiosa, no sólo para quienes están comprometidos con la formación de docentes sino para todos aquellos interesados en la fundamentación conceptual y práctica del uso de la tecnología en el aula de matemáticas.

Con esta propuesta estamos abriendo las posibilidades de innovación curricular y de transformación del ambiente de la escuela para que se asegure a todos los estudiantes la oportunidad de poseer una cultura matemática que permita la formación de ciudadanos adecuada a los nuevos tiempos.

*FRANCISCO JOSÉ LLOREDA MERA*  
Ministro de Educación Nacional

# Introducción

La matemática es un campo del conocimiento en el cual el reto de dirigir el aprendizaje hacia la búsqueda de estructuras cognitivas preparadas para la indagación genuina es fundamental. Para ello ha resultado de la mayor importancia la **mediación** de las nuevas tecnologías. La tecnología informática ha empezado a revolucionar el conocimiento matemático abriendo nuevos caminos a la investigación matemática. Véanse, por ejemplo, los trabajos que se desarrollan bajo el título de matemática experimental: Peitgen, H. et. al. (1992); Davis, P. J. (1993); Bayley, D. & Borwein, J. (2001). Su impacto alcanza también a la educación matemática. No puede dejarse de lado que ese impacto se refleja a nivel epistemológico. En efecto, las posibilidades de manipulación sobre el espacio de representación de un computador o de una calculadora con capacidades de graficación, induce una reificación de los objetos matemáticos que se estudian en las instituciones educativas. Hay evidencias de que esta reificación genera desarrollos cognitivos nada desdeñables en los procesos de aprendizaje escolar.

Consciente de la necesidad de estudiar el fenómeno para comprenderlo, de hacer propuestas en pro de la calidad de la enseñanza de las matemáticas y de generar estrategias didácticas para incorporar los recursos que la tecnología pone al alcance de las instituciones educativas, la Dirección de Calidad de la Educación Preescolar, Básica y Media del Ministerio de Educación Nacional, inició en marzo de 2000, el desarrollo de la Fase Piloto Proyecto *Incorporación de Nuevas*

*Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Media de Colombia* en 60 instituciones educativas de 17 departamentos y 3 distritos capitales de Colombia.

El proyecto está dirigido por educadores matemáticos del Ministerio de Educación, asesorado por el doctor Luis Moreno Armella investigador del CINVESTAV (Centro de Investigaciones y Estudios Avanzados) de México y coordinado en cada departamento o distrito capital por educadores matemáticos de Facultades de Educación o Facultades de Ciencias de 17 universidades públicas y una universidad privada y por profesionales de algunas Secretarías de Educación.

Una componente fundamental del proyecto es la formación de docentes, a través de la cual se esperan cambios en las prácticas educativas usuales que permitan modificar sustancialmente el currículo. Desde su inicio, ha habido una preocupación permanente por construir un marco teórico que proporcione a los docentes elementos conceptuales útiles en su proceso de formación y que suscite la reflexión sobre el papel de la tecnología como agente fundamental para tener una nueva visión del conocimiento y de la actividad matemática en la escuela. Asumir el reto de incorporar la tecnología en el aula, conduce a los docentes a profundizar en sus conocimientos matemáticos y a cuestionar su práctica educativa.

Para atender estos propósitos, el Ministerio de Educación inició la implementación de un

programa de desarrollo de docentes a través de cursos intensivos y graduales de formación, actividades regulares de seguimiento y acompañamiento y apoyo permanente vía Internet, que los han involucrado activamente en su aprendizaje. Además, la conformación de grupos de estudio regionales y locales en los que el trabajo conjunto de profesores universitarios y profesores de colegio, ha contribuido a instaurar hábitos de reflexión permanente sobre el quehacer en el aula y a impulsar la fundamentación teórica y la validación práctica.

Otra componente que este proyecto considera vital para la implementación de la tecnología en el aula, es la producción de materiales de apoyo basados en el uso de la tecnología, en este caso en la integración de las calculadoras gráficas y algebraicas, en los diferentes aspectos del currículo, cuya recopilación nos ha permitido la elaboración de este documento.

Cumplida la Fase Piloto, queremos compartir con la comunidad de educadores matemáticos, algunos materiales que han marcado el desarrollo de esta aventura de exploración e indagación en educación matemática. Hemos escogido un conjunto de artículos y talleres que ilustran el proceso de formación llevado a cabo con los profesores del proyecto y que dan cuenta de la fundamentación conceptual y técnica que se trabajó.

En el primer capítulo se presentan los talleres, documentos de trabajo y artículos relevantes que sirvieron de base para la realización del Primer Seminario de Formación de Docentes, con el cual se inició formalmente la Fase Piloto.

En el capítulo dos, se presenta una recopilación de artículos elaborados por el doctor Luis Moreno, que fueron la base para adelantar la discusión académica. La discusión se centró en la construcción de un marco conceptual elaborado y compartido por todos los participantes del proyecto, que enfatiza en el proceso de articulación del currículo de matemáticas con las tecnologías informáticas.

En el tercer capítulo se encuentran algunos talleres elaborados por el equipo de educadores matemáticos del Ministerio de Educación, para apoyar el seguimiento, orientar el diseño de actividades de clase y propiciar la discusión en los diversos seminarios. Adicionalmente se incluyen algunos talleres que se realizan con dispositivos que se articulan a la calculadora, como el CBR (*Calculator Based Ranger*) y el CBL (*Calculator Based Laboratory*) que permiten el registro de datos externos para estudiar la modelación de situaciones de variación y cambio.

Para finalizar, en el cuarto capítulo se presentan los documentos y talleres elaborados por el grupo del Ministerio y por docentes vinculados al proyecto, para orientar el curso de profundización en el uso de la tecnología y su impacto pedagógico.

Esperamos contribuir al desarrollo de la Educación Matemática en Colombia aportando elementos para la reflexión y la discusión sobre el mejoramiento de la práctica educativa en matemáticas y la incorporación de la tecnología informática al currículo. Este documento será muy importante para la formación de profesores de matemáticas que quieran introducir la tecnología informática en sus clases y para difundir y afianzar la experiencia en todas las regiones del país.

## Capítulo

# 1

## Primer Seminario Nacional de Formación de Docentes en el Uso de la Tecnología

En el Proyecto de *Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Media de Colombia*, la formación de docentes en el uso de la tecnología se realiza a través de dos modalidades: presencial y virtual. La modalidad presencial se lleva a cabo en seminarios nacionales, regionales y locales con la participación de todos los docentes vinculados a la fase piloto. La modalidad virtual se realiza a través de la lista de interés, creada para el proyecto por la Hemeroteca Nacional del ICFES.

En este capítulo se recopilan los materiales que sirvieron de base para la realización del primer seminario, llevado a cabo entre el 27 de marzo y el 11 de abril del año 2000 en Bogotá y Santa Marta simultáneamente, con la participación de los docentes del proyecto.

Como uno de los aspectos fundamentales de la formación es el dominio del recurso tecnológico, el seminario comenzó con un curso sobre el manejo técnico de la calculadora TI 92+, diseñado y orientado por el profesor Martín Acosta Gempeler, a través de talleres que se presentan en la primera sección, cuyo objeto es la adquisición de un dominio técnico de la calculadora TI92+ y de las demás herramientas computacionales del

proyecto. Sin pretender agotar todo el potencial técnico de la calculadora algebraica TI92+, los talleres muestran una panorámica de posibilidades frente a su uso en diversas temáticas del currículo de matemáticas de secundaria, como los sistemas numéricos, los sistemas geométricos y los sistemas de datos, entre otros. Pretenden constituirse en una plataforma de lanzamiento para que los educadores se motiven a ampliar el dominio técnico del instrumento por sí solos o en sus grupos locales de trabajo.

Los talleres están diseñados para que los profesores de matemáticas los trabajen en forma individual o colectiva y a su vez contienen sugerencias e ideas para el diseño de las actividades con los estudiantes. Algunos de ellos requieren el uso de archivos pregrabados en la calculadora, porque el interés no siempre es llegar a una construcción sino partir de ella para hacer exploraciones e inclusive descubrir cómo se hicieron éstas.

Otro aspecto esencial de la Formación Docente es la fundamentación pedagógica, epistemológica y didáctica del uso de la tecnología, sin la cual es imposible que el proyecto cumpla los objetivos propuestos pues la incorporación que se pretende no es meramente instrumental. En la segunda sección se presentan algu-



nos documentos que sirvieron de base a las discusiones orientadas por el doctor Luis Moreno, con las cuales se dio inicio a la fundamentación conceptual. Cada uno de los artículos publicados y los talleres recopilados por el doctor Moreno en apuntes para los seminarios, se constituyen en sí mismo en una fuente de reflexión acerca de ideas centrales del marco teórico: la estrecha relación entre la evolución de la cultura, la tecnología y la cognición, el principio de mediación instrumental, la cognición situada, la ejecutabilidad de las representaciones computacionales y la dinámica entre la exploración y la sistematización como base para la construcción de conocimiento matemático, entre otras.

Como el contexto metodológico que enmarca las acciones didácticas del proyecto

es la *resolución de problemas* con tecnología, en el primer seminario de formación se abordó también esta temática. En la última sección del capítulo 1 se recogen los documentos que sirvieron para apoyar la discusión acerca del aprendizaje de las matemáticas con énfasis en la resolución de problemas. Este trabajo fue orientado por el doctor Luz Manuel Santos Trigo, investigador del CINVESTAV-IPN, invitado como experto en el área, quien centró su actividad en mostrar el uso de la tecnología como herramienta poderosa para que los estudiantes le den sentido a la información, propongan conjeturas, examinen estrategias de resolución de problemas y trabajen como una comunidad en la que se valoran las contribuciones personales y grupales.

# Manual introductorio de la calculadora TI-92

**Martín Eduardo Acosta Gempeler**

Grupo Coordinador  
Ministerio de Educación Nacional

La calculadora TI-92 es un minicomputador de mano, con seis programas diferentes:

- Un programa de álgebra y cálculo (HOME) para realizar todas las operaciones de una calculadora científica, más operaciones de álgebra (factorización, solución de ecuaciones, ...) y cálculo (integración, derivación, ...).
- Un programa de geometría dinámica plana (CABRI GÉOMÈTRE), en el que pueden construirse figuras geométricas de acuerdo con las reglas de la geometría euclidiana (puntos, segmentos, circunferencias...), y la geometría analítica (ejes de coordenadas, ecuaciones, ...).
- Un programa de edición y graficación de funciones (Y = , GRAPH, TABLE, WINDOW).
- Un editor de texto (Text Editor).
- Un editor de programas (Program Editor).
- Una hoja de cálculo (Data/Matrix Editor).

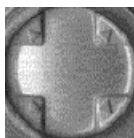
Cada uno de esos programas tiene sus propios comandos y funciones. Esta introducción

sólo se propone explicar procedimientos generales.

## Teclas especiales



La tecla ENTER sirve para validar cualquier expresión o selección. Observe que hay tres de estas teclas en la calculadora, para mayor comodidad.



La tecla del cursor sirve para desplazarse por la pantalla o por los menús desplegados. Tiene movimientos en ocho direcciones. Su función es equivalente a la que desempeña el ratón en el computador.



La tecla de aplicaciones APPS sirve para desplegar el menú de aplicaciones y dar acceso a los diferentes programas de la calculadora.

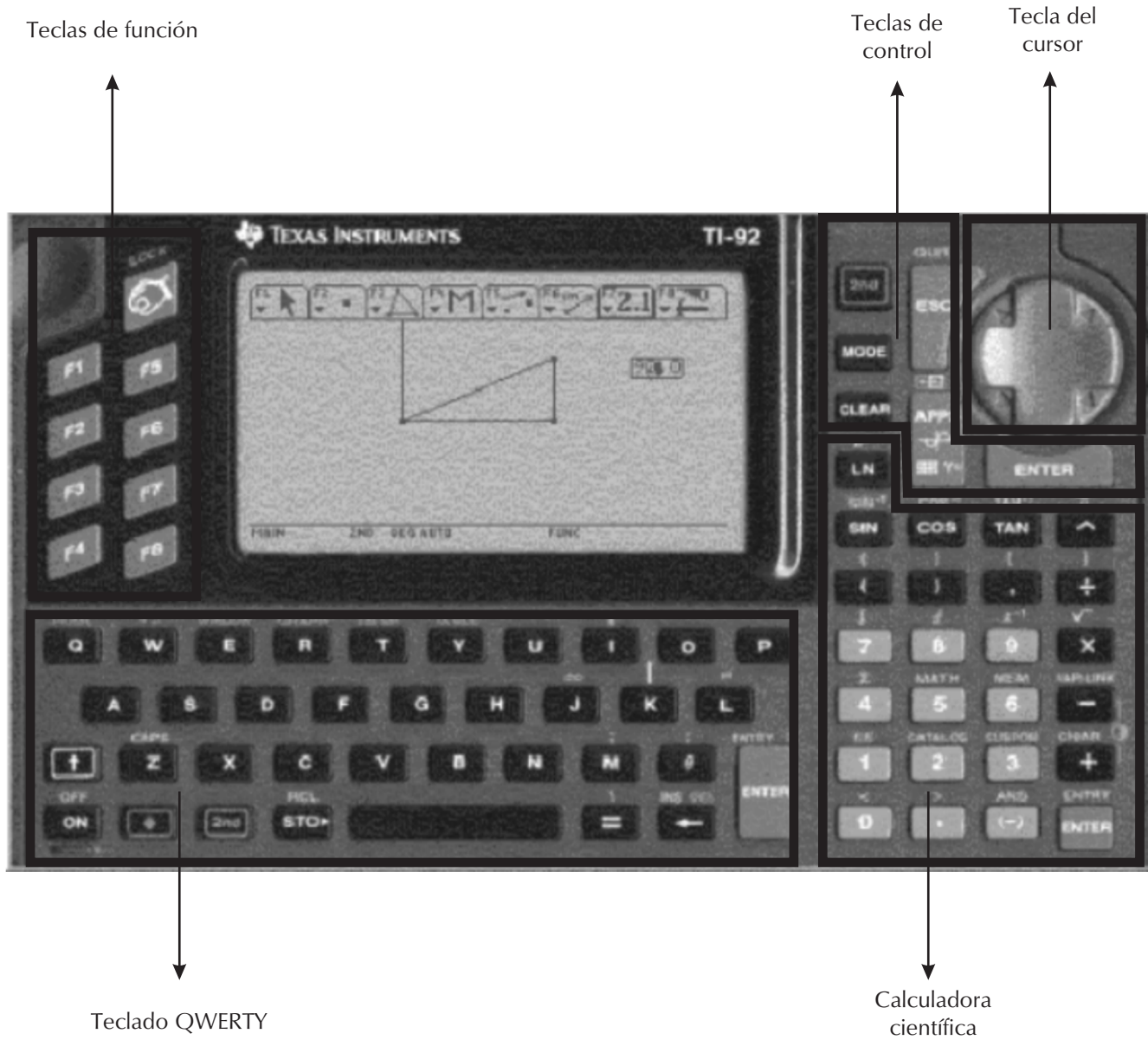


La tecla MODE da acceso a la configuración de la calculadora y permite cambiar los formatos de las opciones de gráficas, cálculos, etc.




La tecla MANO, representada por una mano, se utiliza en el programa CABRI GÉOMÈTRE y es el equiva-

lente al botón izquierdo del ratón del computador. Manteniéndola oprimida se pueden escoger objetos para arrastrarlos.




## Teclas de modificación

Hay teclas que dan acceso a diferentes funciones, escritas en tres colores diferentes: blanco, amarillo o verde.

- A las funciones de color blanco se accede oprimiendo directamente la tecla.
- A las funciones de color amarillo se accede con la combinación  $2^{\text{nd}}$ +TECLA. Por ejemplo, para escribir en la pantalla HOME la expresión  $\sqrt{x}$  se debe oprimir  y luego la tecla  $x$  en el teclado *qwerty*. (**Nota:** es importante no con-

fundir la letra  $x$  con el signo de multiplicación).

- A las funciones de color verde se accede con la combinación  $\blacklozenge$ +TECLA. Por ejemplo, para mostrar la gráfica de una función, se debe oprimir  y la tecla  $w$  del teclado *qwerty*.

Es importante diferenciar entre la tecla  $(-)$ , para escribir el signo negativo, (por ejemplo en la expresión  $y = -3x$ ) y la tecla  $-$  para escribir la operación resta (por ejemplo en la expresión  $y = x - 5$ ).

## Combinaciones de teclas importantes

$\blacklozenge$ +Q	Entra a la pantalla HOME (aritmética, álgebra, cálculo)
$\blacklozenge$ +W	Edita ecuaciones (para definir funciones)
$\blacklozenge$ +E	Define los rangos en la ventana de graficación. Pantalla WINDOW
$\blacklozenge$ +Y	Presenta la tabla de valores de las funciones seleccionadas
$\blacklozenge$ +R	Presenta la gráfica de las funciones seleccionadas
$\blacklozenge$ +ENTER	Presenta el resultado aproximado de una operación
$\blacklozenge$ +“+”	Aumenta el contraste
$\blacklozenge$ +“-”	Disminuye el contraste
$2^{\text{nd}}$ +ESC	Sale del programa al que se entró por accidente
$2^{\text{nd}}$ +“-”	Presenta el listado de archivos. Es equivalente al explorador de windows
$2^{\text{nd}}$ +MANO+ON	Resetea el sistema cuando se bloquea
$\blacklozenge$ +ON	Apaga la calculadora y guarda la última pantalla
$2^{\text{nd}}$ +ON	Apaga la calculadora

# Introducción al programa de geometría Cabri Géomètre

**Martín Eduardo Acosta Gempeler**

Grupo Coordinador  
Ministerio de Educación Nacional

El programa de geometría incluido en la calculadora TI-92, es una adaptación del programa CABRI GÉOMÈTRE de geometría dinámica.

## Abrir el programa

Para iniciar el programa de geometría debe oprimir la tecla APPS+8, o APPS+1 si la calculadora tiene Aplicaciones Flash. Se presenta un menú con tres opciones:

- **Current** sirve para abrir el último archivo que se trabajó
- **Open** sirve para seleccionar el archivo que se desea abrir
- **New** sirve para abrir un archivo nuevo.

Seleccione **New**. Aparece una ventana como la de figura 1, en donde debe escribir el nombre que quiere dar al archivo. Escríbalo y valídalo con ENTER. Oprima nuevamente ENTER para iniciar.

## Uso de los menús

Este es un programa de geometría dinámica que permite hacer construcciones e investi-

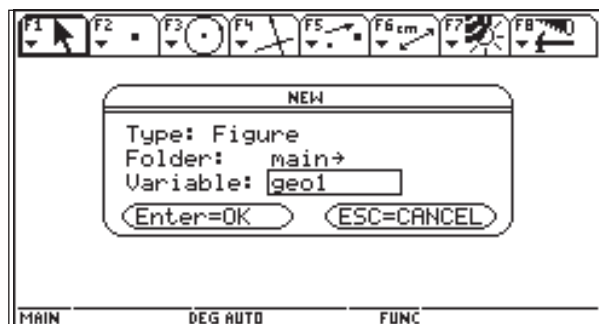


Figura 1

gar sobre las propiedades de muchas figuras geométricas.

Al entrar al programa aparece la siguiente pantalla:

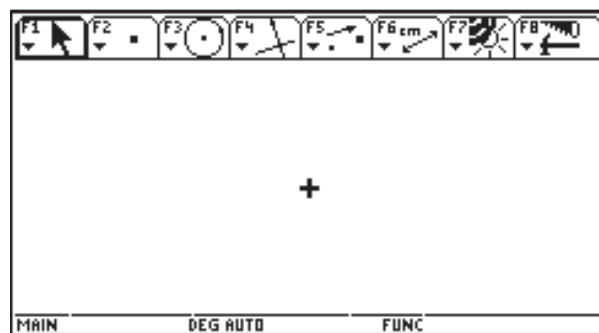


Figura 2

Con las teclas F1 a F8 se despliegan los diferentes menús que permiten seleccionar las herramientas para trabajar.

Oprima F2+1 para dibujar un punto. Ahora el cursor toma forma de lápiz. Con la tecla del ratón puede mover el cursor por la pantalla. Al oprimir ENTER se dibujará un punto.

Explore las diferentes herramientas de construcción de los menús F2 y F3 (**Line**, **Segment**, **Ray**, **Circle**, **Triangle**).

## Desplazamiento de objetos

Los objetos construidos en CABRI GÉOMÈTRE no son estáticos, sino que pueden ser desplazados a cualquier parte del plano. Para explorar esta posibilidad efectúe los siguientes pasos:

- borre todo lo que dibujó anteriormente (F8 + 8)
- dibuje un triángulo (F3 + 3)
- seleccione la herramienta **Pointer** (F1 + 1) y acerque el cursor a uno de los vértices del triángulo hasta que aparezca el letrero THIS POINT
- oprima la tecla MANO (verá aparecer una mano que *agarr*a el punto para moverlo)
- manteniendo oprimida la tecla MANO, utilice la tecla del cursor para mover ese punto.

Observe que con una sola construcción usted puede obtener, por desplazamiento, cualquier clase de triángulo.

## Construcciones geométricas

Las opciones presentadas en el menú F4, permiten hacer otras construcciones. Siga las

instrucciones para construir rectas perpendiculares y paralelas:

- borre sus construcciones
- dibuje cualquier recta y un punto
- seleccione la herramienta **Perpendicular Line** (F4 + 1)
- acerque el cursor al punto hasta que aparezca THRU THIS POINT
- oprima ENTER
- acerque el cursor a la recta hasta que aparezca PERPENDICULAR TO THIS LINE
- oprima ENTER
- seleccione la herramienta **Pointer**
- desplace el punto por el plano y observe qué sucede con la recta perpendicular.

Repita el procedimiento anterior, pero seleccionando la herramienta **Parallel Line**.

## Etiquetas

Para dar nombre a un objeto se procede como en el siguiente ejemplo:

- borre sus construcciones
- dibuje un segmento
- seleccione la herramienta **Label** (F7 + 4)
- acerque el cursor a uno de los extremos del segmento y oprima ENTER
- escriba A
- acerque el cursor al otro extremo y llámelo B
- seleccione la herramienta **Midpoint** (F4 + 3)

- acerque el cursor al segmento hasta que aparezca MIDPOINT OF THIS SEGMENT
- oprima ENTER
- seleccione la herramienta **Pointer**
- desplace el punto  $A$  y observe qué sucede con el punto medio del segmento
- seleccione la herramienta mediatriz, **Perpendicular Bisector** ( $F4 + 4$ )
- acerque el cursor al segmento  $AB$  y oprima ENTER
- desplace los puntos  $A$  y  $B$  observando qué sucede con la mediatriz.
- desplace los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$  observando qué sucede con la bisectriz
- construya la mediatriz de  $\overline{BC}$
- seleccione la herramienta **Intersection Point** ( $F2 + 3$ )
- acerque el cursor a la bisectriz de  $ABC$  hasta que aparezca THIS LINE
- oprima ENTER
- acerque el cursor a la mediatriz de  $BC$  hasta que aparezca THIS LINE
- oprima ENTER
- llame  $P$  al punto de intersección creado

## Borrar un objeto

El siguiente procedimiento muestra cómo borrar un objeto y lo que sucede cuando se borra un objeto del cual dependen otros.

- Seleccione la herramienta **Pointer** ( $F1 + 1$ )
- acerque el cursor a la mediatriz de  $\overline{AB}$  hasta que aparezca THIS LINE
- oprima ENTER para seleccionar la mediatriz (observe que la mediatriz cambia de apariencia)
- oprima la tecla DEL (flecha que está a la derecha del “=” en el teclado *qwerty*)
- construya un segmento  $BC$  concatenado con el segmento  $AB$  pero no colineal con él
- seleccione la herramienta **Angle Bisector** (bisectriz  $F4 + 5$ ) y señale el ángulo  $ABC$ . Para señalar el ángulo  $ABC$  deben señalarse los puntos en ese orden. (Recuerde, debe aparecer THIS POINT y oprimir ENTER)

- señale el segmento  $BC$  y oprima DEL
- observe qué pasa con el punto  $P$  y los demás objetos de la construcción.

## Solución de ambigüedades

Algunas veces hay varios objetos en el mismo sitio y para seleccionar alguno de ellos el programa debe saber cuál de todos se intenta señalar. Por eso al acercar el cursor aparece la pregunta ¿Cuál objeto? (WHICH OBJECT?). Al oprimir ENTER se despliega una lista con todos los objetos que están allí, en su orden de construcción. Así puede seleccionarse uno de ellos, como en el siguiente ejemplo:

- dibuje una recta
- dibuje un segmento sobre la recta
- seleccione **Pointer**
- acerque el cursor al segmento hasta ver el mensaje WHICH OBJECT?

- oprima ENTER y verá aparecer la lista: THIS LINE, THIS SEGMENT
- seleccione el segmento con la opción THIS SEGMENT y bórralo.

### Resumen de comandos

Entrar al programa Cabri Géomètre	APPS 8
Señalar y seleccionar un objeto	F1 + 1 ( <b>P</b> ointer)
Desplazar un objeto	F1 + 1, mantener oprimida la MANO y mover el cursor
Borrar un objeto	F1+1, seleccionar el objeto y oprimir la tecla ←
Borrar toda la pantalla	F8 + 8
Dar nombre a un objeto	F7 + 4 ( <b>L</b> abel)
Configurar (ejes, cuadrícula, ...)	F7 + 9 ( <b>F</b> ormat)



# Lugares geométricos

**Martín Eduardo Acosta Gempeler**

Grupo Coordinador  
Ministerio de Educación Nacional

Un tema muy interesante y llamativo para los alumnos, pero difícil de trabajar con regla y compás, es el de lugares geométricos. La geometría dinámica abre nuevas posibilidades de exploración en este campo.

Un lugar geométrico es el conjunto de todos los puntos que cumplen una cierta condición. Comencemos el taller con la pregunta:

**¿Cuál es el lugar geométrico de todos los puntos que están a igual distancia de dos puntos dados?**

En CABRI GÉOMÈTRE podemos construir dos puntos  $A$  y  $B$  de base y medir la distancia de un punto  $P$ , a cada uno de esos puntos.

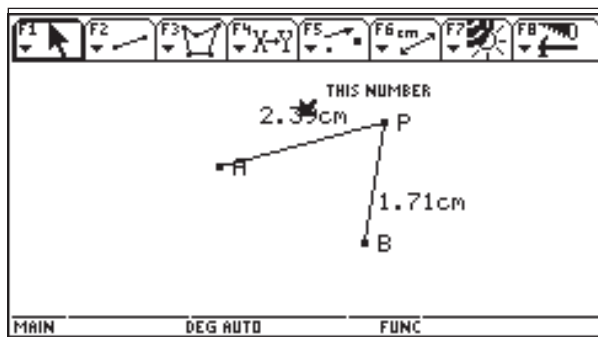


Figura 1

Con un poco de paciencia puede mover el punto  $P$  hasta colocarlo en una posición aproximadamente equidistante de  $A$  y  $B$

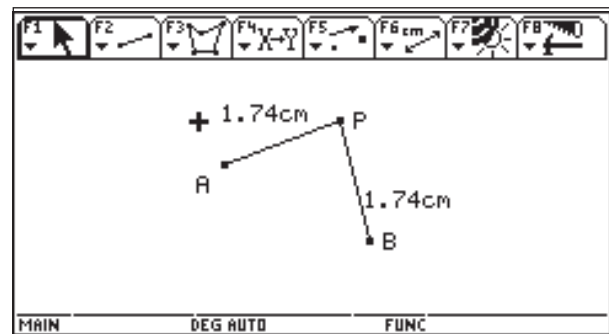


Figura 2

Si quiere visualizar todos los puntos equidistantes de  $A$  y  $B$ , puede hacer que el punto  $P$  deje una huella (Trace) y moverlo de manera que cumpla la condición. Oprima  $F7+2$  para activar la traza y señale el punto  $P$

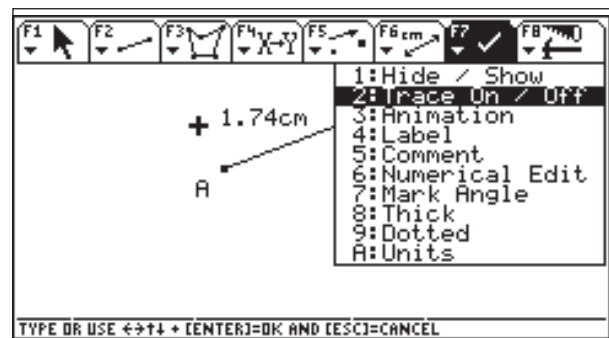


Figura 3

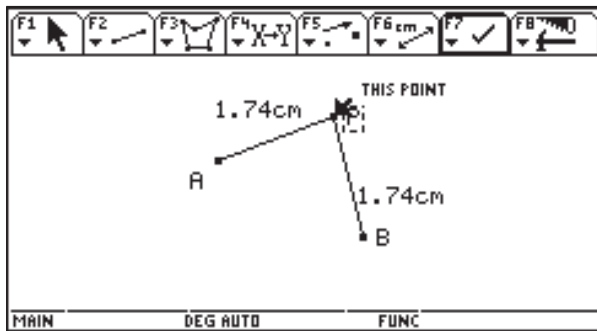


Figura 4

Ahora mueva el punto  $P$  poco a poco procurando que las distancias de  $P$  a  $A$  y a  $B$  sean iguales:

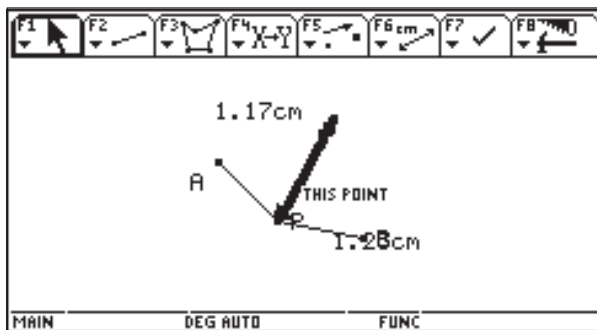


Figura 5

¿Qué forma tiene la huella de  $P$ ? ¿Podría describir exactamente su posición? Ahora podemos responder a la pregunta inicial.

El lugar geométrico de los puntos equidistantes a dos puntos dados se llama **MEDIATRIZ**, y es la recta perpendicular al segmento definido por los dos puntos dados y que pasa por su punto medio.

Vamos a utilizar esta definición para explorar un nuevo lugar geométrico.

**¿Cuál es el lugar geométrico de todos los puntos equidistantes de un punto dado y de una recta dada?**

Comencemos dibujando un punto  $F$ , una recta  $d$  y un punto  $P$  tal que  $P$  quede a la misma distancia de  $F$  y  $d$ . (Recuerde que la distancia de un punto a una recta es la longitud del segmento perpendicular a la recta con extremos en el punto y en la recta).

Con un poco de paciencia podemos encontrar algunas posiciones en las que  $P$  es equidistante de  $F$  y  $d$ .

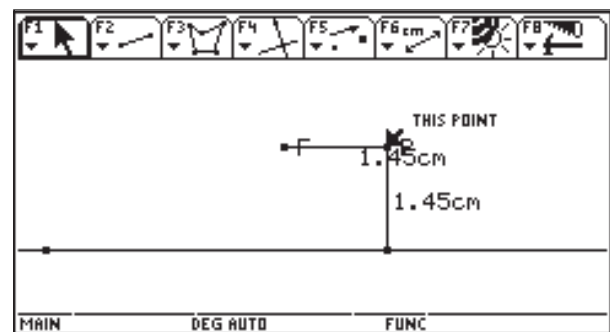
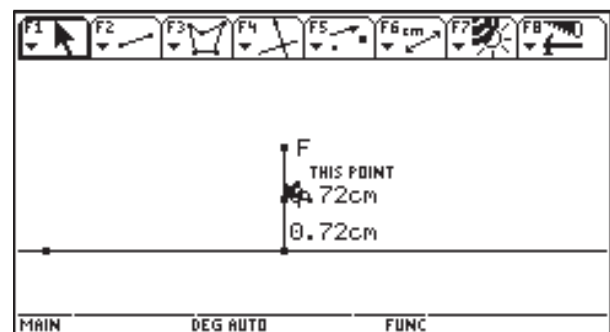


Figura 6

Notará que no es fácil mover el punto  $P$  de manera que se mantenga a igual distancia de  $F$  y  $d$ . Pero analizando la situación, puede verse que  $P$  es equidistante de dos puntos: de  $F$  y de un punto sobre la recta  $d$ . Si llamamos  $Q$  al punto de intersección de  $d$  y la recta perpendicular a  $d$  que pasa por  $P$ , puede verse que  $P$  es la intersección de la mediatriz del segmento  $FQ$  con la recta perpendicular a  $d$  que pasa por  $Q$ .

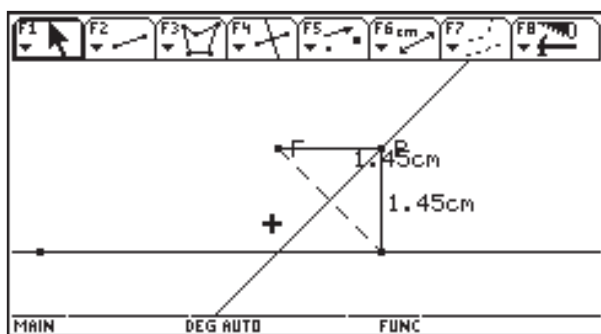


Figura 7

Ahora podemos mirar la huella del punto  $P$  de intersección. Para ello, construya  $F$  y  $d$  en un archivo nuevo y defina  $Q$  como punto sobre  $d$ . Luego trace la perpendicular a  $d$  que pasa por  $Q$  y la mediatriz (Perpendicular Bisector) del segmento  $FQ$ .

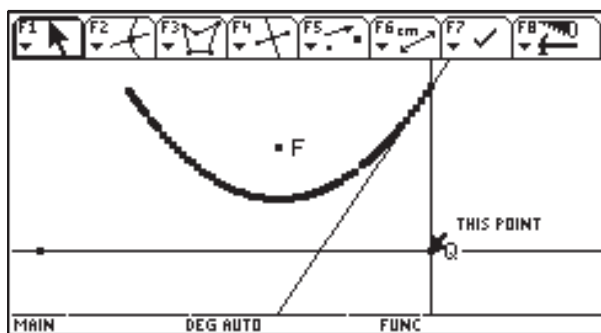


Figura 8

CABRI GÉOMÈTRE también puede calcular y trazar automáticamente el lugar geométrico

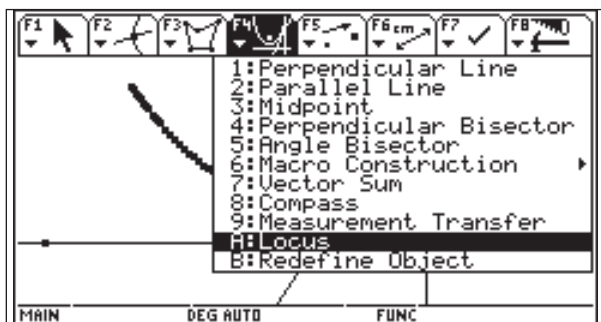


Figura 9

de un punto que deja huella con respecto a otro que se mueve. En este caso, el lugar de  $P$  con respecto a  $Q$ . Para ello, oprima  $F4+A$  (Locus).

Señale sucesivamente el punto  $P$  (que define el lugar de puntos) y el punto  $Q$  (que determina las posiciones de  $P$ ).

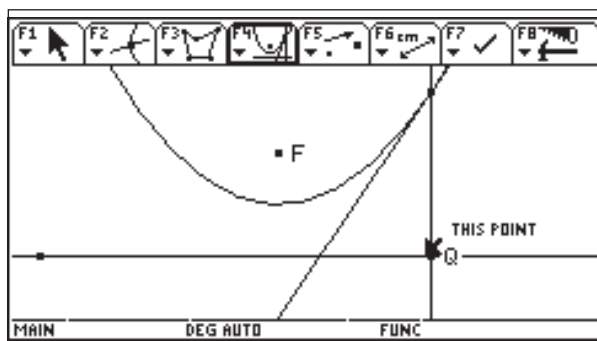


Figura 10

Otros ejemplos:

a) Construya una circunferencia de centro  $A$  y radio  $AB$ . Construya el segmento  $AB$ , un punto  $F$  sobre él y un punto  $M$  sobre la circunferencia. Construya la mediatriz del segmento  $FM$  y llámela  $m$ . Llame  $P$  la intersección de la recta  $m$  y el segmento  $AM$ . ¿Cuál es el lugar definido por  $P$  cuando  $M$  se mueve sobre la circunferencia?

b) Construya una circunferencia de centro  $O$  y un punto  $M$  sobre la circunferencia. Dibuje un punto  $A$  en cualquier parte. Construya la tangente  $t$  a la circunferencia en el punto  $M$ . Construya la perpendicular a  $t$  que pasa por  $A$  y llámela  $r$ . Llame  $Q$  la intersección de  $t$  y  $r$ . ¿Cuál es el lugar definido por  $Q$  cuando  $M$  se mueve sobre la circunferencia?

# Macro construcciones y cajas negras en el programa de geometría

**Martín Eduardo Acosta Gempeler**

Grupo Coordinador  
Ministerio de Educación Nacional

El programa CABRI GÉOMÈTRE permite automatizar construcciones, de manera que no es necesario repetir todos los pasos.

## Macro construcciones

Para definir una macro o construcción automatizada, es necesario definir los OBJETOS INICIALES (objetos en los que se basa la construcción) y los OBJETOS FINALES (el resultado final de la construcción). A continuación se ejemplifica esta función del programa.

### Macro: **cuadrado**

Se trata de automatizar la construcción de un cuadrado con base en un segmento dado:

- construya un segmento  $AB$
- construya la recta  $r_1$  perpendicular a  $\overline{AB}$  y que pase por  $A$
- construya la recta  $r_2$  perpendicular a  $\overline{AB}$  y que pase por  $B$
- construya la circunferencia  $C_1$  con centro  $A$  y radio  $\overline{AB}$
- construya la intersección de  $C_1$  y  $r_1$

- llame  $D$  a uno de los puntos de esa intersección
- construya la recta  $r_3$  perpendicular a  $r_1$  y que pase por  $D$
- llame  $C$  la intersección de  $r_3$  y  $r_2$
- construya el polígono  $ABCD$
- oculte las construcciones intermedias.

Vamos ahora a ilustrar cómo se automatiza esta construcción.

Al oprimir  $F4+6$  obtendrá la siguiente pantalla (figura 1):

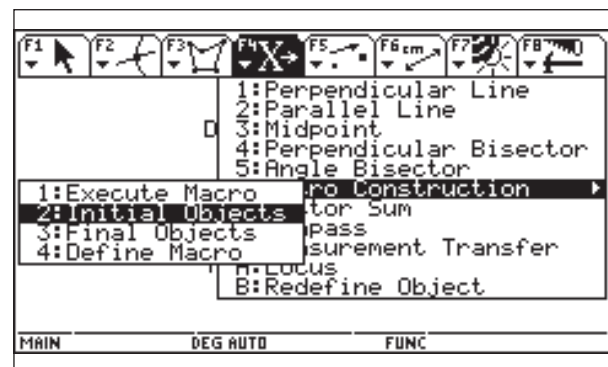


Figura 1

Seleccione la opción 2: **Initial Objects**, y proceda a señalar los puntos *A* y *B*, extremos del segmento que sirvió de base para la construcción del cuadrado.

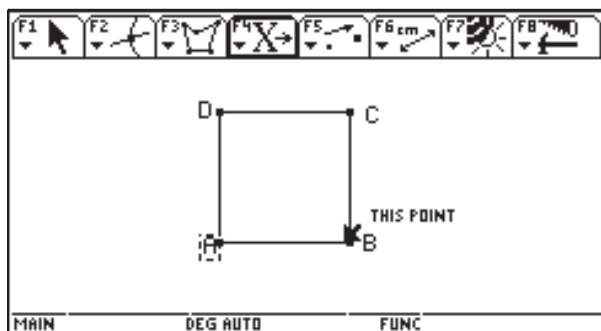


Figura 2

Nuevamente oprima F4+6 y seleccione **Define Macro**. Obtendrá una pantalla como la siguiente, donde debe especificar el nombre de la macro:

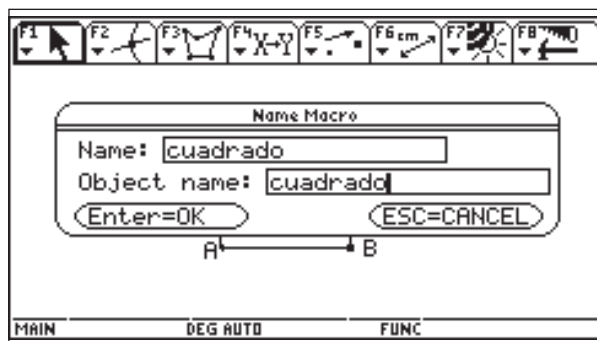
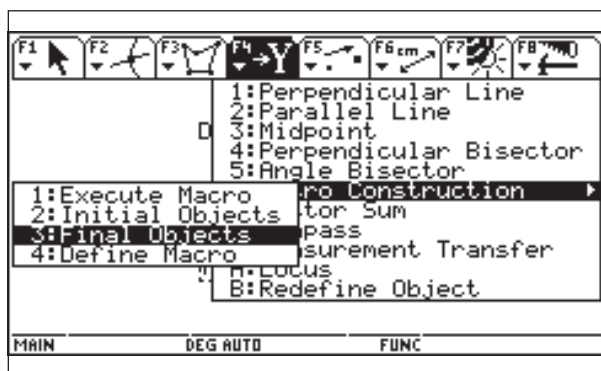


Figura 4

Oprima nuevamente F4+6, seleccione **Final Objects** y señale el polígono *ABCD*.



Para terminar, guarde la macro en un archivo al cual le debe asignar un nombre.

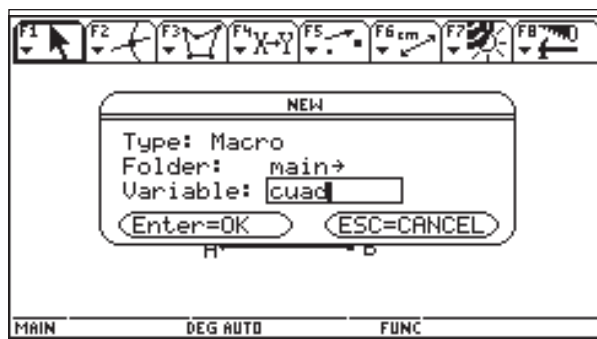


Figura 5

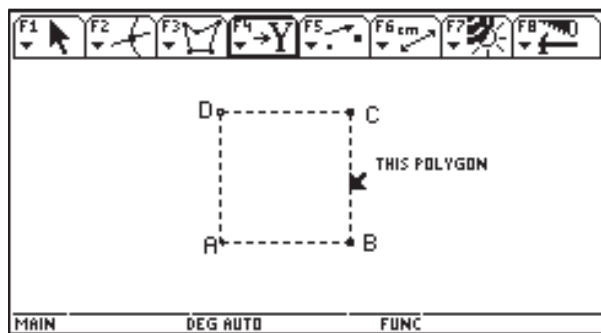


Figura 3

Para ejecutar la macro, oprima F4+6 y seleccione **Execute Macro**. Luego seleccione la macro 1: cuadrado y señale cualquier par de puntos en la pantalla ¿Qué sucede? (figura 6).

### Cajas Negras

Una aplicación pedagógica interesante de las macros es la producción de CAJAS NEGRAS,

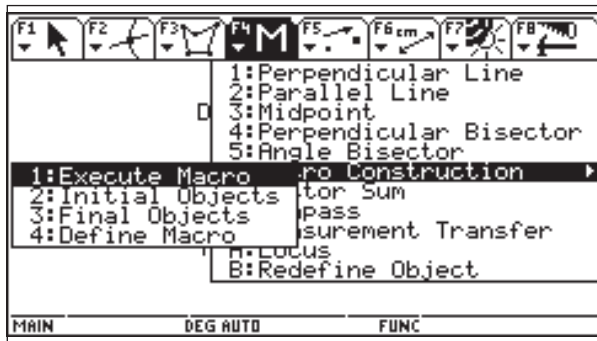


Figura 6

macros que producen un determinado resultado en la pantalla, que se debe analizar para descubrir y reconstruir el proceso de construcción de la macro, e identificar relaciones invariantes en la figura.

El ejercicio con CAJAS NEGRAS requiere una preparación previa del profesor quien realiza una construcción y luego oculta todos los objetos, menos los iniciales. El alumno abre la MACRO CONSTRUCCIÓN y la ejecuta.

Para cada uno de los siguientes ejemplos, el profesor debe construir previamente la macro que va a utilizar con sus estudiantes. Las indicaciones correspondientes a cada construcción se precisarán al final del taller.

Para abrir cualquier macro, debe estar ubicado en la pantalla de CABRI GÉOMÈTRE, oprimir  $F8 + 1$  ( $\emptyset$ pen) y seleccionar la macro que desea abrir.

**Ejercicio 1.** Abra la macro **Caja 1\***. Para esto debe seguir las siguientes instrucciones:

- oprima  $F8 + 1$  ( $\emptyset$ pen)
- seleccione `Type: Macro`  
`Folder: main`  
`Variable: caja1`
- oprima  $F4 + 6$  y seleccione `Execute Macro`.

Señale dos puntos en la pantalla. ¿Qué aparece?

Mueva los dos puntos y descubra las relaciones invariantes en la figura

Abra un archivo nuevo e intente reproducir la macro.

**Ejercicio 2.** Construya un segmento cualquiera y un punto sobre ese segmento. Abra la macro **Caja 2\*\*** y señale el segmento y el punto. ¿Qué aparece? Mueva los objetos y estudie las relaciones invariantes. Abra un archivo nuevo e intente reproducir la macro.

**Ejercicio 3.** Construya un paralelogramo. Luego abra la macro **Caja 3\*\*\*** y señálelo. ¿Qué aparece? Estudie los invariantes. Abra un archivo nuevo e intente reproducir la macro.

### Nota para el profesor

A continuación se transcriben los archivos correspondientes. Al momento de trabajar el taller deben suprimirse estas instrucciones para no dañar el sentido de los ejercicios.

\*La macro **Caja 1** se construye de la siguiente manera:

- se ubican dos puntos en la pantalla
- se construye el simétrico de uno de los puntos con respecto al otro
- se construye una recta que pase por los tres puntos
- se construye una perpendicular a la recta por el punto que resultó al realizar la simetría
- se ocultan ( $F7+1$ ) la recta que pasa por los tres puntos y el punto que resultó al efectuar la simetría

- se automatiza la construcción tomando como objetos iniciales los dos primeros puntos y como objeto final la recta perpendicular.

\*\*La macro **Caja 2** se construye de la siguiente manera:

- se construye un segmento y un punto sobre él
- se construye la perpendicular al segmento por el punto
- se construye el punto medio del segmento
- se construye una circunferencia con centro en el punto medio y radio la mitad del segmento
- se construye el punto de intersección de la circunferencia con la perpendicular
- se traza el segmento que une el pie de la perpendicular y el punto de intersección de la circunferencia con la perpendicular.

- se ocultan todos los objetos excepto el segmento, el punto sobre el segmento y la altura
- se automatiza la construcción tomando como objetos iniciales el segmento y el punto sobre él y como objeto final la altura del triángulo.

\*\*\*La macro **Caja 3** se construye de la siguiente manera:

- se construye un paralelogramo
- se construyen las bisectrices de los ángulos interiores
- se construyen los puntos de corte de las bisectrices
- se construye el cuadrilátero cuyos vértices son los puntos de corte de las bisectrices
- se ocultan las bisectrices
- se automatiza la construcción tomando como objeto inicial el paralelogramo y como objeto final el cuadrilátero.

# Construcciones dinámicas en el programa Cabri Géomètre

**Martín Eduardo Acosta Gempeler**

Grupo Coordinador  
Ministerio de Educación Nacional

El dinamismo de las construcciones en CABRI GÉOMÈTRE nos introduce naturalmente en el mundo de los invariantes. Todo dibujo en la pantalla no es definitivo, sino que puede ser manipulado y transformado. Por eso es importante descubrir las propiedades que permanecen constantes durante el desplazamiento. Toda imagen en la pantalla es provisional y sus características son sólo aparentes. Es necesario DUDAR de lo que se ve y mover la figura para ver si sus propiedades se mantienen en TODOS los casos.

Al construir figuras dinámicas, debemos tener en cuenta que sólo las propiedades construidas explícitamente (por una orden del programa) *resistirán* el desplazamiento. Así,

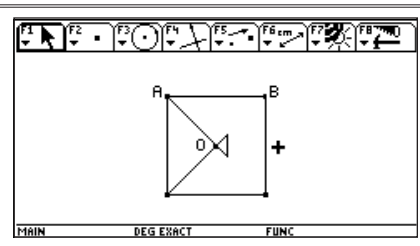
la geometría se convierte en el arte de descubrir relaciones y ponerlas a prueba.

## Ejercicios

1. Explore sucesivamente los archivos DUDAR1A, DUDAR1B, DUDAR2A, DUDAR2B, DUDAR3A, DUDAR3B. ¿Qué relaciones geométricas observa? ¿Resisten el desplazamiento? (las instrucciones de los archivos correspondientes se encuentran al final del taller)
2. Construya un cuadrado que resista el desplazamiento (con sus lados congruentes y sus ángulos rectos).
3. Haga las siguientes construcciones<sup>1</sup>:

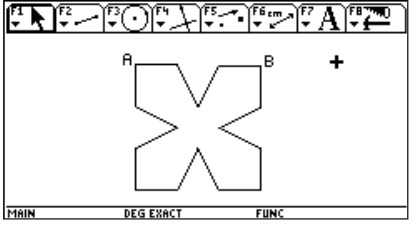
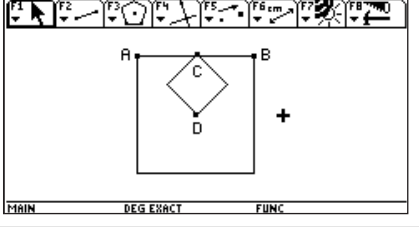
Construya el segmento  $AB$  y haga el resto de la construcción a partir de ese segmento.

Cuando termine desplace  $A$  y  $B$ . Su figura no debe deformarse.

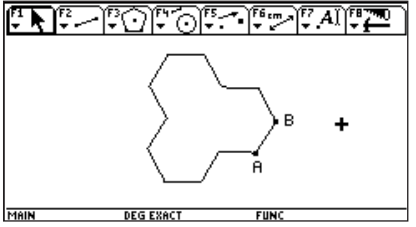


<sup>1</sup> Tomadas de la revista CABRIOLE [www.cabri.net/cabriole](http://www.cabri.net/cabriole)



<p>Construya el segmento <math>AB</math> y haga el resto de la construcción a partir de ese segmento.                  Cuando termine desplace <math>A</math> y <math>B</math>. Su figura no debe deformarse.</p>	
<p>Construya el segmento <math>AB</math> y haga el resto de la construcción a partir de ese segmento.                  Oculte los trazos de construcción.                  Cuando termine, desplace <math>A</math> y <math>B</math>. Su figura no debe deformarse.                  Trate de encontrar un método diferente (el más corto posible).</p>	

### Ejercicio de desafío

<p>Construya el segmento <math>AB</math> y haga el resto de la construcción a partir de ese segmento.                  Oculte los trazos de construcción.                  Cuando termine desplace <math>A</math> y <math>B</math>. Su figura no debe deformarse.</p>	
---	--

### Nota para el profesor

A continuación se presentan las instrucciones para construir los archivos. No deben entregarse a los alumnos para no dañar los ejercicios.

Archivo DUDAR1a. Construya un segmento y un punto  $A$  en cualquier lugar de la pantalla. Desplace  $A$  hasta que *parezca* ser un objeto sobre el segmento

Archivo DUDAR1b. Construya un segmento y un punto  $A$  sobre el segmento.

Archivo DUDAR2a. Construya dos rectas *aparentemente* perpendiculares.

Archivo DUDAR2b. Construya dos rectas perpendiculares (F4+1)

Archivo DUDAR3a. Construya una circunferencia, un punto sobre ella y una recta. Desplace la recta hasta que *parezca* ser la tangente a la circunferencia en el punto.

Archivo DUDAR3b. Construya una circunferencia, un punto sobre ella y una tangente a la circunferencia por el punto.

# Modelación en geometría

**Martín Eduardo Acosta Gempeler**

Grupo de coordinación  
Ministerio de Educación Nacional

Una importante posibilidad de la geometría dinámica es la de modelar situaciones reales para experimentar con los modelos y obtener información sobre el fenómeno en estudio. En este taller se ejemplifica esta posibilidad con el problema de la caja, un conocido problema de cálculo que dice así:

***Se desea construir una caja sin tapa con un pedazo rectangular de material, recortando cuadrados de igual tamaño de sus esquinas y doblando. ¿Para qué tamaño de cuadrado recortado es máximo el volumen de la caja?***

La dificultad de muchos estudiantes ante este problema, radica en la incapacidad para representar mentalmente las relaciones que entran en juego (la relación entre el lado del cuadrado y el volumen de la caja). La realización de un modelo donde pueda explicitarse esta relación será de beneficio para la comprensión del problema y la búsqueda de estrategias de solución.

## 1. Estudio de la situación.

- El modelo debe basarse en un rectángulo de un tamaño arbitrario que representará el pedazo de material.
- Para representar los cortes debemos construir cuadrados congruentes en las

esquinas del rectángulo (basta con construir uno y hacer sus simétricos).

- El tamaño de esos cuadrados tiene que variar, por lo que debe haber un punto móvil sobre uno de los lados del rectángulo, punto que determina el tamaño del cuadrado.
- Existe un tamaño límite del cuadrado: su lado no puede sobrepasar la mitad del lado más corto del rectángulo.

## 2. Construcción.

Construya un rectángulo de 2 cm x 3 cm.

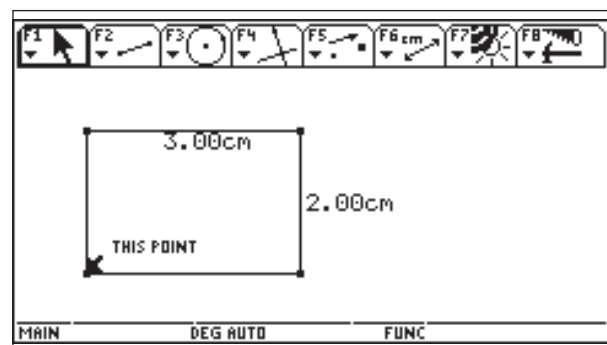


Figura 1

Construya el punto medio de uno de los lados más cortos.

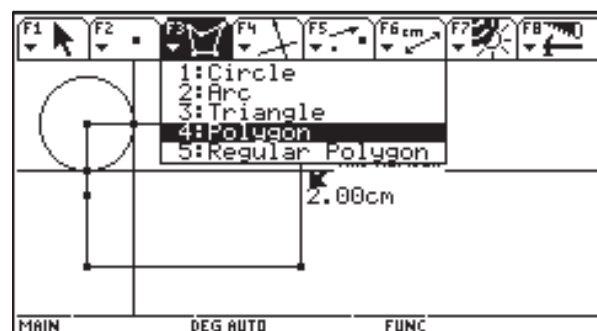
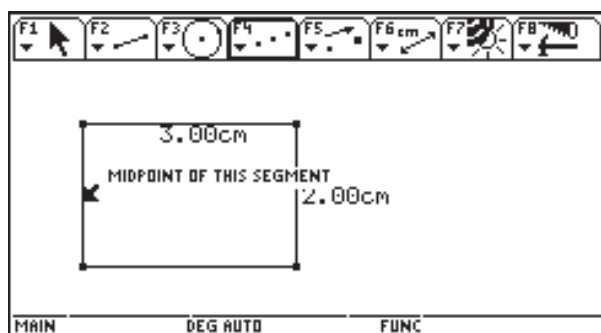
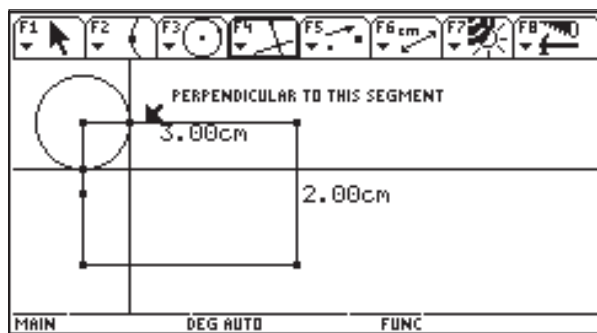
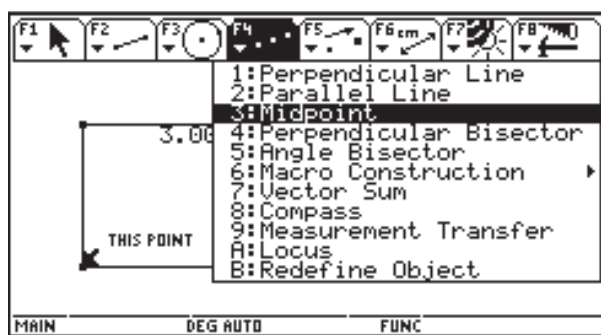


Figura 2

Figura 4

Construya un segmento desde el extremo del lado corto hasta el punto medio y dibuje un punto sobre ese segmento.

Construya las mediatrices de los lados del rectángulo.

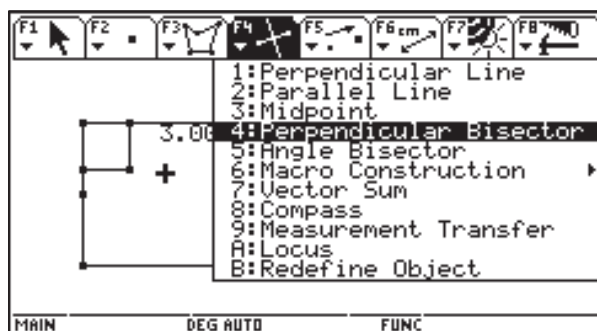
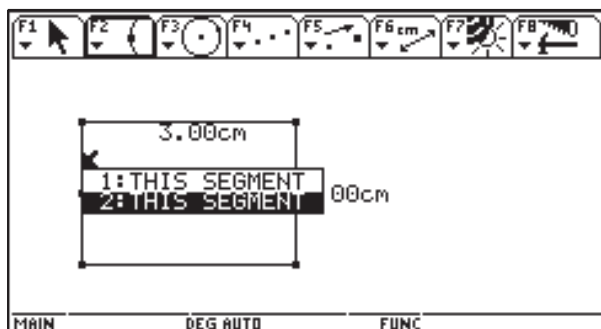


Figura 3

Construya un cuadrado utilizando la esquina del rectángulo y el punto móvil sobre el segmento (use la opción polígono).

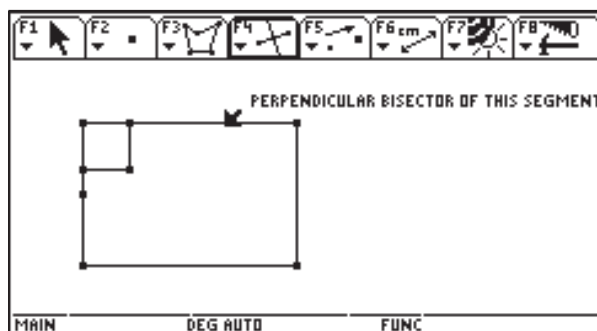


Figura 5

Construya la simetría axial del cuadrado usando las mediatrices como ejes de simetría.

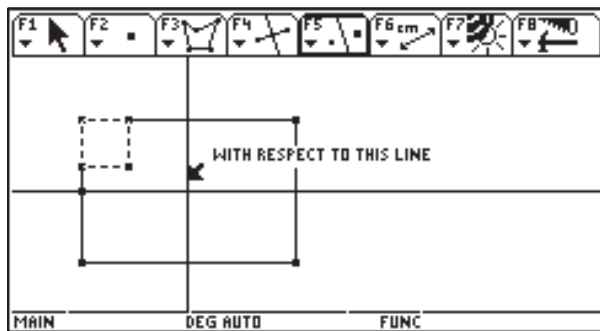
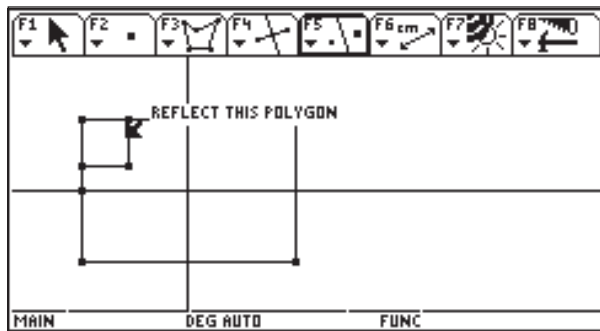
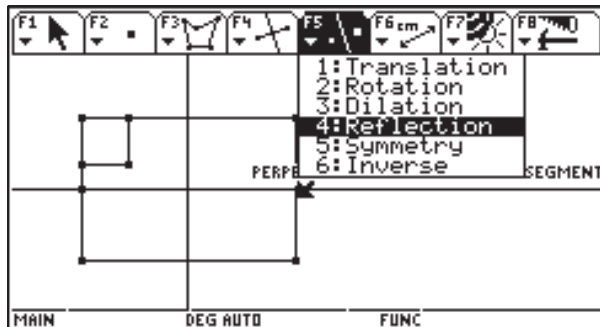


Figura 6

Oculte las construcciones intermedias.

Ya tiene un modelo del pedazo rectangular con cuadrados recortados de las esquinas. El punto móvil le da la posibilidad de explorar todos los posibles tamaños de cuadrados. Ahora construya segmentos que representen las tres dimensiones de la caja y mídalos.

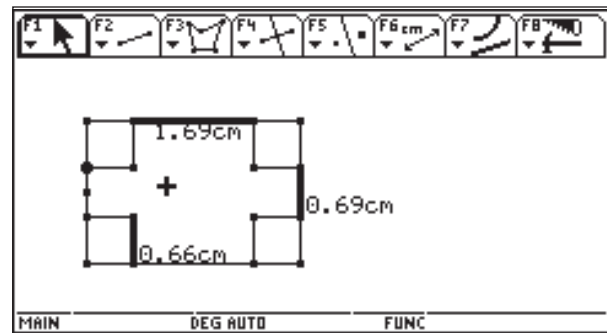


Figura 7

Utilizando la opción Comment (F7+5) organice la información en la pantalla.

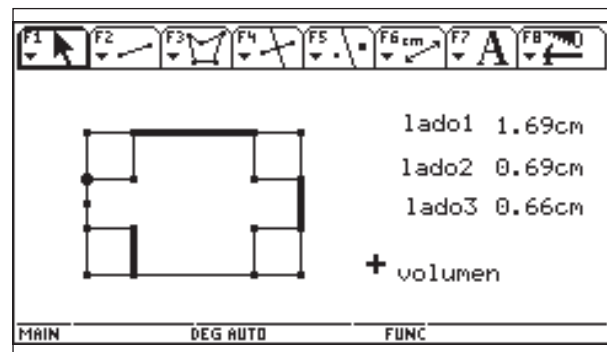
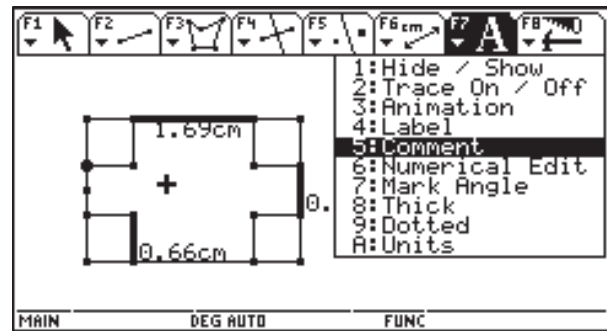


Figura 8

Ahora calcule el volumen de la caja con la opción Calculate (F6+6) y señale sucesivamente los valores de los lados de la caja.

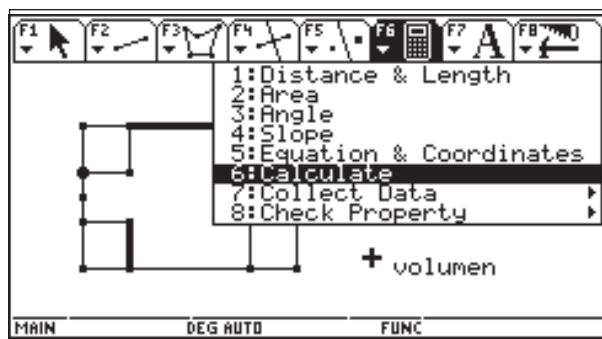


Figura 9

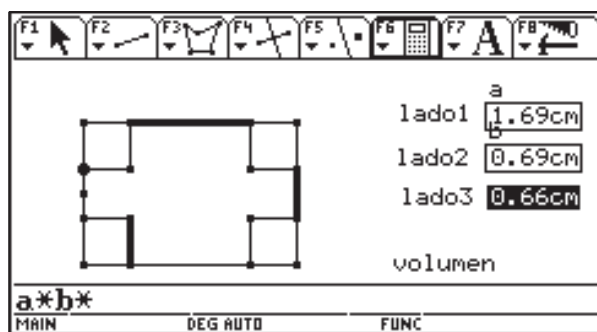


Figura 11

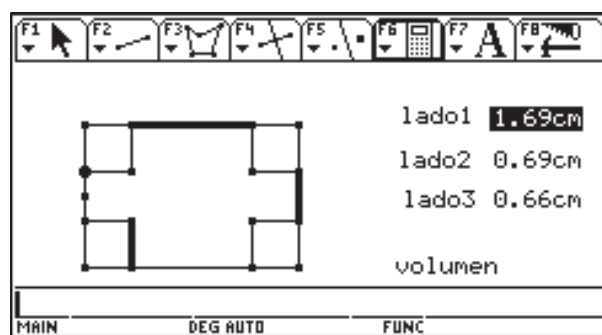


Figura 10

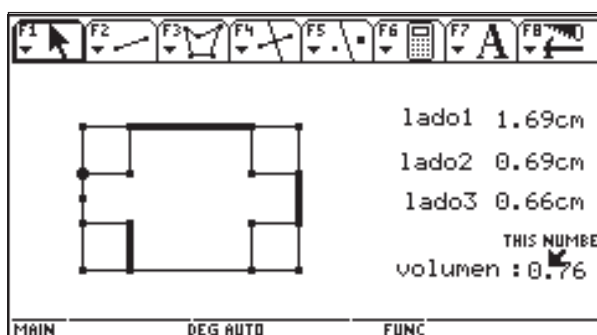


Figura 12

En este momento ya puede mover el punto que determina el tamaño del cuadrado y observar cómo varía el volumen de la caja.

**Opcional.** Si desea hacer una representación tridimensional del modelo construya tres rectas intersecantes que simulen un sistema de coordenadas, transfiera la medida de los segmentos (F4 + 9) que representan las

dimensiones de la caja, en cada uno de los ejes. Luego construya tres vectores del mismo tamaño de los segmentos y haga las traslaciones necesarias para hacer la caja. Mueva el punto que determina el tamaño del cuadrado y observe cómo varía la forma y el volumen de la caja.

# ¿Qué es el número e?<sup>2</sup>

**Martín Eduardo Acosta Gempeler**

Grupo Coordinador  
Ministerio de Educación Nacional

El crecimiento exponencial ocurre en muchos campos. Al investigar matemáticamente este tipo de crecimiento, se encuentra el número  $e$ , base de los logaritmos naturales. Vamos a estudiar el área bajo la curva con ecuación  $y = 1/x$  (integral definida de la función  $f(x) = 1/x$  sobre algún intervalo), para llegar a las nociones de función logaritmo natural y de número  $e$ .

La calculadora TI-92 puede usarse para representar y calcular el área bajo la curva de una función. La siguiente gráfica, por ejemplo, muestra el área bajo la curva  $y = 1/x$  desde 1 hasta 4.

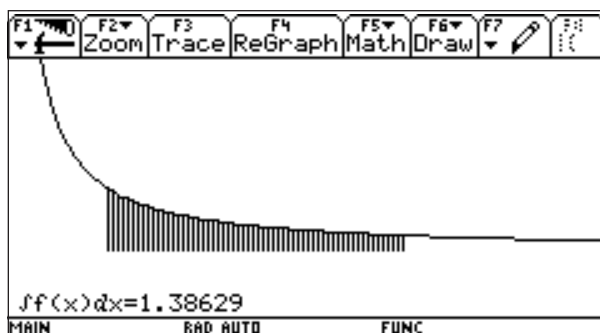


Figura 1

**1. Área debajo de la curva.** Entre al editor de funciones ( $\blacklozenge$ W) y borre las funciones existentes presionando F1+8 (Clear Functions) + ENTER.

Escriba la función  $y_1 = 1/x$ .

Oprima  $\blacklozenge$ E (WINDOW) para modificar los valores mostrados en la gráfica por los dados a continuación:

```
xmin = 0  
xmax = 6  
xscl = 1  
ymin = -1  
ymax = 3  
yscl = 1  
xres = 2
```

Presione  $\blacklozenge$ R (GRAPH) para mostrar la gráfica de la función.

Para representar la región bajo la curva desde 1 hasta 4 seleccione  $\int f(x)dx$  presionando F5+7. La calculadora pregunta por el límite inferior (Lower Limit): presione 1+ENTER. Para el límite superior (Upper Limit) presione 4+ENTER.

<sup>2</sup> Adaptación de un taller de DISCOVERING MATH ON THE TI-92

## 2. Experimentando con el límite superior.

Entre a HOME (♦Q) y calcule la integral

$$\int_1^b \frac{1}{x} dx$$

para diferentes valores de  $b$ . Para esto, presione 2<sup>nd</sup>+7, escriba (1/t,t,1,1.5) y presione ENTER. La calculadora halla

$$\int_1^{1.5} \frac{1}{t} dt$$

Repita el mismo cálculo cambiando 1.5 por 2, 2.5, 3, 3.5, etc.

Como puede ver, al cambiar el límite superior  $b$ , cambia el valor de la integral. Consigne los valores obtenidos de las integrales en una tabla y gráfíquelos. Esto lo puede hacer oprimiendo APPS+6+3, para ingresar a una tabla de datos.

**3. La gráfica de  $F$ .** Nos hemos encontrado con la función que a cada límite superior le asigna el valor de la integral correspondiente. Explícitamente,

$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt.$$

En la pantalla HOME defina la función  $F$  presionando F4+1+ENTER, escribiendo  $F(x) =$ , oprimiendo 2<sup>nd</sup>+7 y escribiendo (1/t, t, 1,x).

En la pantalla WINDOW especifique los siguientes parámetros:

```
xmin = 0
xmax = 25
xscl = 1
ymin = -1
ymax = 4
```

```
yscl = 1
xres = 2
```

En el editor de funciones (♦W), introduzca la función  $y_1 = F(x)$ .

Ahora presione ♦R para ver la gráfica de  $F$ . ¡Tenga paciencia! Las funciones definidas por integrales se dibujan muy lentamente. Compare la gráfica obtenida con la de los datos del punto 2.

**4. Progresiones geométricas.** Una progresión geométrica es una sucesión de números reales que se genera multiplicando sucesivamente por un número real fijo  $r$ . Explícitamente, si multiplicamos  $a$  por  $r$  obtenemos  $ar$ . Si multiplicamos  $ar$  por  $r$  obtenemos  $ar^2$ . Si multiplicamos  $ar^2$  por  $r$  obtenemos  $ar^3$  y así sucesivamente. Se obtiene de esta manera la progresión geométrica  $a, ar, ar^2, ar^3, ar^4, ar^5, ar^6, ar^7, \dots$

Construya la progresión geométrica a partir de  $a = 2$  y  $r = 3$ . Entre a HOME, escriba 2 y oprima ENTER; oprima ×, escriba 3 y oprima ENTER; oprima ×, escriba 3 y oprima ENTER; oprima ×, escriba 3 y oprima ENTER,... En la pantalla se va formando la lista de números 2, 6, 18, 54, 162, ... Construya otras progresiones geométricas a su gusto.

¿Cómo saber si una sucesión es una progresión geométrica? Si  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \dots$  es una progresión geométrica, cualquier término  $x_n$  se debe obtener del anterior  $x_{n-1}$  multiplicando por un número  $r$ . Es decir,  $x_n = r x_{n-1}$ , o, lo que es lo mismo,  $x_n/x_{n-1} = r$ . Por ejemplo, para la sucesión  $x_1 = 2, x_2 = 6, x_3 = 18, x_4 = 54, \dots$  se tiene que  $x_2/x_1 = x_3/x_2 = x_4/x_3 = \dots = 3$ .

**5. Una progresión geométrica muy especial.** Estudiemos ahora la sucesión  $x_n$  definida por  $n = F(x_n)$  donde  $F$  es la función definida en el punto 3. Explícitamente,

$$1 = F(x_1)$$

$$2 = F(x_2)$$

$$3 = F(x_3)$$

$$4 = F(x_4)$$

.

.

.

¿Será ésta una progresión geométrica? Para encontrar explícitamente los valores de  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \dots$  procedemos de la siguiente manera. En el editor de funciones ( $\blacklozenge W$ ), introduzca las funciones:  $y_1 = F(x), y_2 = 1, y_3 = 2, y_4 = 3, y_5 = 4, \dots$  Ahora presione  $\blacklozenge R$  (GRAPH) para ver la gráfica de las funciones.

¿Dónde corta la gráfica de  $F$  las líneas horizontales  $y_2 = 1, y_3 = 2, y_4 = 3, y_5 = 4$ ? Para hallar la intersección de  $y = F(x)$  y de  $y = 1$ , presione  $F5+5$  y seleccione **intersection**. El cursor se coloca sobre la curva  $y_1$ . Presione ENTER para seleccionar  $y_1$  como primera función. El cursor se coloca sobre  $y_2$ . Oprima ENTER para seleccionarla como segunda función. Ahora la calculadora pide determinar un intervalo en el cual se quiere buscar la intersección; mueva el cursor a la izquierda del punto de intersección y oprima ENTER, luego

mueva el cursor a la derecha del punto de intersección y oprima ENTER.

Almacene ese valor en la variable `SYSDATA` presionando  $\blacklozenge D$ . Debe aparecer el mensaje `DATA PLACED IN VARIABLE SYSDATA`. Encuentre y almacene los otros tres puntos de intersección. Para ver los valores almacenados, presione  $APPS+6$  (**Data editor**) y seleccione la variable `SYSDATA`. Luego presione ENTER dos veces.

Note que los valores en la columna  $y$  crecen linealmente, mientras que los de la columna  $x$  crecen más rápidamente. Calcule  $x_2/x_1, x_3/x_2, \dots$  ¿Qué valores encontró? Podrá darse cuenta que todos los cocientes coinciden con el valor aproximado  $e = 2.7183$ , y que por lo tanto la sucesión  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \dots$  es una progresión geométrica. Explícitamente,

$$x_1 = e^1, x_2 = e^2, x_3 = e^3, x_4 = e^4, \dots$$

Si calculamos el logaritmo en base  $e$  en cada una de estas igualdades obtenemos

$$\log_e(x_1) = 1, \log_e(x_2) = 2, \log_e(x_3) = 3, \log_e(x_4) = 4, \dots$$

Se deduce de aquí que

$$\log_e(x_n) = \int_1^{x_n} \frac{1}{t} dt = \ln(x_n).$$

¿Qué es el número  $e$ ?



# Solución de un sistema de ecuaciones en el programa de álgebra y cálculo<sup>3</sup>

**Martín Eduardo Acosta Gempeler**  
Grupo Coordinador  
Ministerio de Educación Nacional

En este taller se ejemplifican los métodos de eliminación, sustitución y matricial para resolver un sistema de ecuaciones.

## 1. Método de eliminación

**Problema.** *Un entrenador de tenis compra comida para su equipo en un restaurante. Ordena ocho hamburguesas y cinco porciones de papas a un costo de \$47.500.00. Como algunos de los jugadores quedan con hambre, el entrenador compra seis hamburguesas más y otras dos porciones de papas por \$33.000.00. ¿Cuál es el precio de una hamburguesa y de una porción de papas?*

El planteamiento del problema puede hacerse mediante un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Cada compra se expresa como una ecuación lineal con incógnitas  $x$  e  $y$ , donde  $x$  representa el precio de una hamburguesa e  $y$  representa el precio de una porción de papas:

$$\begin{aligned}8x + 5y &= 47.500 \\6x + 2y &= 33.000\end{aligned}$$

Veamos cómo resolver el sistema.

Antes de comenzar asegúrese de que no existan valores asignados para las variables. Si desea borrarlos, ubíquese en la pantalla HOME y seleccione en el menú F6 la opción 1 (Clear a-z).

En la pantalla HOME escriba la primera ecuación, oprima la tecla STO (almacenar) y escriba **ecua1**. Presione ENTER para almacenar la ecuación. Repita el procedimiento para la segunda ecuación y llámela **ecua2**.

**Para eliminar una variable** los coeficientes de una de las variables deben ser opuestos o inversos aditivos. Vamos a eliminar  $x$  multiplicando la primera ecuación por 3. Para ello:

- Presione F2+3 (**expand** = distribuir)
- Escriba 3\***ecua1**, oprima STO y escriba **ecua1** para almacenar la ecuación multiplicada por 3.

<sup>3</sup> Adaptación de un taller de DISCOVERING MATH ON THE TI-92

- Repita el procedimiento para la segunda ecuación, eligiendo el factor adecuado por el cual multiplicar.
- Suma las ecuaciones escribiendo **ecua1** + **ecua2**. Presione ENTER. El resultado es una ecuación en términos de  $y$ .

**Para solucionar esta ecuación presione F2+1 (solve = resolver).** Presione la tecla del cursor hacia **arriba** para seleccionar la ecuación a resolver y oprima ENTER para pegarla en la línea de comandos. Luego escriba,  $y$ ) y oprima ENTER.

Escriba el valor obtenido para  $y$ , y oprima STO  $y$  para almacenarlo en la variable  $y$ .

Presione F2+1. Escriba **ecua1**,  $x$ ) y oprima ENTER para obtener el valor de  $x$  (precio de la hamburguesa).

## 2. Método de sustitución

Considere el siguiente sistema de tres ecuaciones

$$\begin{aligned} -3x + 2y + z &= 27 \\ 5x - y + 9z &= 45 \\ 4x + 3y - 6z &= -62. \end{aligned}$$

Presione F6+1+ENTER para borrar los valores almacenados en las variables. Introduzca las ecuaciones y almacénelas con STO en **ecua1**, **ecua2** y **ecua3**. (Recuerde que en la calculadora hay una tecla especial para el signo -, diferente de la operación resta).

- **Para despejar  $z$**  de la primera ecuación, presione F2+1 (solve) teclee **ecua1,z**) y oprima ENTER.
- Al sustituir este valor en las ecuaciones 2 y 3 se obtiene un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

- **Para hacer la sustitución** se usa el operador **con** de la TI-92 |(2<sup>nd</sup> K) que sustituye la expresión que le sigue en la expresión que le precede.
- Escriba **ecua2** y presione 2<sup>nd</sup> K. Luego oprima el cursor hacia arriba para seleccionar la ecuación de  $z$  y presione ENTER para pegarla en la línea de comandos. Almacene el resultado en **ecua2**.
- Escriba **ecua3** y presione 2<sup>nd</sup> K. Luego oprima el cursor hacia arriba para seleccionar la ecuación de  $z$  y presione ENTER para pegarla en la línea de comandos. Almacene el resultado en **ecua3**.

Solucione la ecuación 2 para  $x$  y sustitúyala en la ecuación 3. El resultado obtenido para  $y$  almacénelo en  $y$ . Solucione ahora nuevamente la ecuación 2 para  $x$  y almacene este valor en  $x$ . Finalmente solucione la ecuación 1 para  $z$ .

## 3. Método de matrices

La TI-92 tiene una función para resolver sistemas de ecuaciones simultáneas (**simult**). Este método es especialmente útil para sistemas de más de dos ecuaciones. Los coeficientes se escriben como una matriz y los resultados en otra matriz. La calculadora devuelve una matriz columna con las soluciones.

En el siguiente ejemplo se muestra cómo se introducen los valores para el sistema

$$\begin{aligned} 6x - 2y &= 2 \\ 3x + 4y &= -19. \end{aligned}$$

**Nota.** Los elementos en la fila se separan con comas y las filas con punto y coma. La matriz de coeficientes se separa con coma de la matriz de constantes.

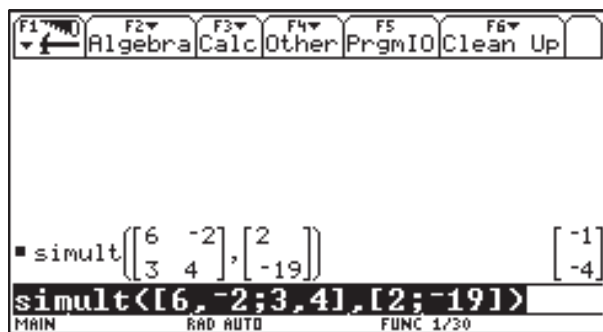


Figura 1

Utilice este método para solucionar el sistema

$$\begin{aligned} 10x - 3y + 7z &= -55 \\ -x - 4y + 2z &= -29 \\ 6x + 3y - 5z &= 55. \end{aligned}$$

# Regresión lineal<sup>4</sup>

**Martín Eduardo Acosta Gempeler**

Grupo Coordinador  
Ministerio de Educación Nacional

Una regresión es un intento de modelar con una ecuación datos obtenidos experimentalmente. En este taller vamos a crear unas listas de datos e intentaremos determinar la ecuación lineal que mejor se ajuste a dichos datos.

**Problema.** Encuentre la ecuación lineal que mejor se ajusta a los datos (1, 6), (2, 10), (3, 13), (4, 12), (5, 17).

Encienda la calculadora y en la pantalla principal (HOME) borre el área de registro con F1+8. Borre la línea de comandos con CLEAR.

**1. Creación de las listas.** Las listas se escriben en la línea de comandos entre llaves { }. Para crear la lista de las abscisas teclee 2<sup>nd</sup>(1,2,3,4,5 2<sup>nd</sup>)STO **listax** ENTER. Repita el procedimiento para la lista de las ordenadas y almacénela en **listay**.

**2. Graficación.** Para graficar los datos presione ♦W y así entrar al editor de funciones. Si ya hay algún gráfico estadístico (P1ot) definido, presione F5+1 y seleccione **All off** para des-seleccionarlos todos. Presione la tecla del cursor hacia arriba para seleccionar el primer gráfico (P1ot) libre y presione ENTER. Aparecerá la siguiente pantalla:

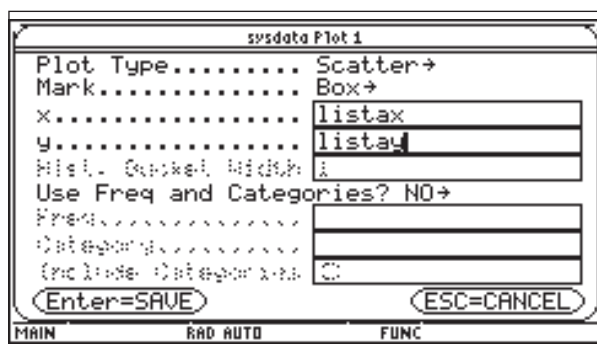


Figura 1

Escriba **listax** y **listay** en las casillas respectivas. Luego oprima dos veces ENTER

Para dividir la pantalla en dos regrese a la pantalla principal oprimiendo ♦HOME. Luego oprima MODE F2 y con el cursor seleccione **Split Screen** y 3: **Left- Right**. Oprima ENTER para confirmar. La pantalla aparecerá dividida, con la gráfica a la derecha.

Oprima ♦R (GRAPH) para mostrar la gráfica de los datos. Para ajustar los datos a la pantalla presione F2 (Zoom) y seleccione 9: **Zoom-Data**. Debe obtener una pantalla como la siguiente:

<sup>4</sup> Adaptación de un taller de DISCOVERING MATH ON THE TI-92

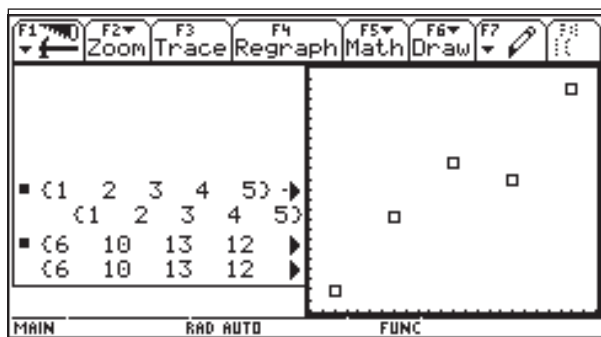


Figura 2

Fíjese que la parte derecha tiene un borde grueso. Esto significa que es la parte de la pantalla **activa**. Para activar la otra parte de la pantalla oprima 2<sup>nd</sup> APPS.

**3. Búsqueda de la ecuación que modela los datos.** Ahora se quiere definir una ecuación que modele los datos. Como en la gráfica parece que la mayoría de los puntos están en una recta, buscaremos una ecuación lineal de la forma  $y = m * x + k$ . Podría hacerse en el editor de datos **Data/Matrix Editor**, si los datos se hubiesen capturado en una tabla. En este caso vamos a hacerlo desde la pantalla HOME. Para hacerlo:

Escriba  $m * x + k$  STO  $y1(x)$  y oprima ENTER. Verifique la exactitud de su ecuación escribiendo  $y1(x)$  ENTER. Si ve expresiones numéricas en lugar de  $m x + k$  es porque tiene almacenado algún valor para las variables. En ese caso oprima F6+1 y repita este procedimiento.

Ahora necesitamos definir un criterio numérico para saber qué tan ajustada está la ecuación con relación a los datos. Si la línea está bien ajustada, la *distancia* de cada uno de los puntos a la línea debe ser mínima. Esta distancia se toma como la diferencia entre la ordenada del punto dado y el valor de la función aplicada en la abscisa de ese punto en la línea; pero, para evitar que las diferen-

cias positivas (de los puntos que están encima de la línea) se anulen con las diferencias negativas (de los puntos que están debajo de la línea), se toma el cuadrado de la diferencia. Por eso este es el método de los mínimos cuadrados.

Sumamos entonces los cuadrados de las diferencias, suponiendo que la línea que mejor se ajusta a los datos será aquella tal que la *suma de los cuadrados de sus distancias* sea la más pequeña. Para ello:

- presione F4+1 y seleccione **Define**
- escriba  $ss = \text{sum}((\text{list}y - y1(\text{list}x))^2)$  y oprima ENTER
- verifique la exactitud de la fórmula tecleando  $ss$  y oprimiendo ENTER
- debe obtener  $5k^2 + k(30m - 116) + 55m^2 - 396m + 738$
- si no obtiene este valor, revise su ecuación.

Llegó el momento de ensayar los valores de  $m$  y  $k$  para ajustar la línea a los datos. Para comenzar tomemos  $m = 2$ ,  $k = 2$ . Presione ENTER y CLEAR.

- 2 STO  $m$  ENTER
- 2 STO  $k$  ENTER
- ♦ GRAPH

Debe obtener una pantalla como la que aparece en la página siguiente (figura 3).

Esta no es una buena aproximación. Presione 2<sup>nd</sup> APPS para activar la pantalla HOME y escriba  $ss$  para ver el coeficiente de ajuste.

Con  $m = 2$  y  $k = 2$ , la línea  $y = 2x + 2$  tiene una suma de cuadrados de 74.

Intente encontrar una buena aproximación con valores diferentes para  $m$  y  $k$ . Verifique

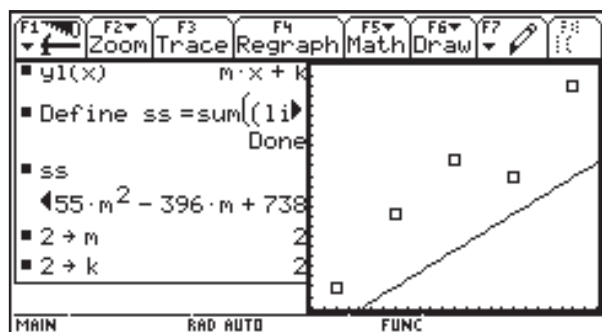


Figura 3

mirando la gráfica y calculando el coeficiente ss.

La TI-92 utiliza el método de los mínimos cuadrados para calcular la ecuación que mejor se ajusta a los datos. Desde la pantalla HOME presione 2<sup>nd</sup> MATH y seleccione 6: Statistics, 3: Regression y 1: Lin-Reg. Luego escriba **listax**, **listay** ENTER. Para ver los resultados escriba *showstat* y oprima ENTER.

# Actividades en sistemas numéricos

**Hugo Martín Cuéllar García**  
Grupo Coordinador  
Ministerio de Educación Nacional

## 1. Los cuatro cuatros

Una de las primeras dificultades a la que nos enfrentamos cuando trabajamos con la calculadora TI-92, consiste en determinar la *forma de escribir* las operaciones en ella. Al considerar el clásico problema de los cuatro cuatros se genera algún tipo de dificultad inicial al transcribir en la calculadora las expresiones obtenidas a lápiz y papel.

- Empleando cada vez cuatro cuatros obtenga expresiones aritméticas cuyos resultados sean los números naturales menores que 20.
- Compruebe los resultados obtenidos con la calculadora.

Al escribir las expresiones para cada uno de los números dados en la tabla, se tiene que la escritura lineal (en el área de registro) puede alterar los resultados, si no se tiene en cuenta el orden en que la calculadora efectúa las operaciones. Sin esta precaución, donde debería ser 3 puede aparecer 9, en lugar de 12 puede aparecer 45 y el 5 se podría cambiar por 17.

En cada uno de estos casos vale la pena preguntar a los estudiantes sobre lo que piensan acerca de las operaciones que rea-

1 =	11 =
2 =	$12 = \frac{44+4}{4}$
$3 = \frac{4+4+4}{4}$	13 =
4 =	14 =
$5 = \frac{4 \times 4 + 4}{4}$	15 =
6 =	16 =
7 =	17 =
8 =	18 =
9 =	19 =
10 =	20 =

liza la calculadora. ¿Se equivocó la calculadora? ¿La expresión que dimos no era correcta? Además, se puede generar una discusión en cuanto a las modificaciones necesarias (uso de paréntesis y signos de agrupación) que se deben hacer en cada una de las expresiones halladas, para obtener la respuesta correcta en cada caso.







# Datos agrupados. Trabajo con el paquete de estadística

Edwin Alfredo Carranza Vargas  
Instituto Pedagógico Nacional

Tomaremos un conjunto numeroso de datos para hacer un análisis estadístico, a partir de la técnica de datos agrupados.

## 1. Introducción de los datos

Oprima la tecla APPS, seleccione 6: **Data/Matrix Editor** y en el menú elija 3: **New**. Coloque nombre a la variable, oprima ENTER para aceptar el nombre de la variable y nuevamente ENTER para obtener la pantalla del Editor que se muestra a continuación:

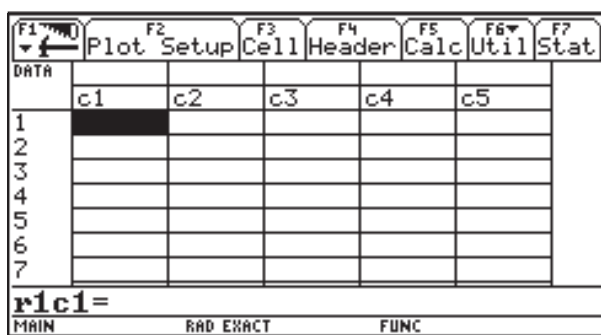


Figura 1

- Introduzca los datos en la columna c1. Cada vez que introduzca un dato oprima ENTER.

## 2. Ordenamiento de los datos

- Es posible ordenar los datos de menor a mayor. Para ello, seleccione F6+3: **Sort Column**.
- ¿Cuál es el menor de los datos? ¿Cuál es el mayor de los datos? ¿Cuál es la diferencia entre el mayor y el menor de los datos? A la diferencia entre el menor y el mayor de los datos se le conoce como el rango del conjunto.

## 3. Cálculo de algunos valores representativos del conjunto

- Al oprimir F5 se obtiene una pantalla como la siguiente, a través de la cual es

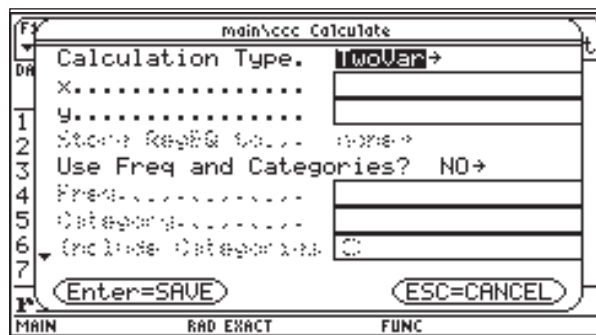


Figura 2

posible hallar diferentes medidas para el conjunto.

- En el menú **Calculation Type**, seleccione 1: **Onevar** ya que vamos a hacer cálculos con una sola variable. Indique para la variable  $x$  que los datos han sido introducidos en la columna  $c1$ , oprima **ENTER** para aceptar. Como por ahora no haremos cálculos con frecuencias, a la pregunta **Use Freq and Categories?**, responda **NO**. Ahora oprima **ENTER**.
- Observe los valores de la media, la desviación estándar de la muestra, los cuartiles  $Q1$  y  $Q3$  y la mediana. Justifique por qué la mediana es el mismo cuartil  $Q2$ . Interprete los resultados obtenidos.
- Compare la media y la desviación estándar de la muestra con los valores obtenidos para otros conjuntos introducidos por los demás compañeros.
- Oprima **ENTER** para regresar al Editor.

#### 4. Histograma

- A continuación representaremos gráficamente los datos por medio de un histograma. Para tal efecto, oprima **F2**, borre por medio de **F3** cada una de las gráficas

(**Plot**) que aparecen en el listado e inicie la definición de la gráfica **Plot1** por medio de **F1**, para lo cual aparece una pantalla como la anterior (figura 3).

- En la opción **Plot Type** seleccione 4: **Histogram**. Indique que los datos de la variable  $x$  se introdujeron en la columna  $c1$  y oprima **ENTER**.
- Decida de cuántas barras construirá el histograma. Esto significa que se requiere el cálculo del ancho de la barra, teniendo en cuenta el rango. Escriba este valor del ancho en **Hist. Bucket Width** y oprima **ENTER**.
- Puesto que por ahora no estamos trabajando con frecuencias predeterminadas, a la pregunta **Use Freq and Categories?**, responda **NO** y oprima **ENTER**.
- Para ver la gráfica, oprima **♦R (GRAPH)**. Si no observa la gráfica como la esperaba, oprima **F2** y seleccione 9: **ZoomData**. Realice los ajustes necesarios para los ejes de la gráfica por medio de **♦E (WINDOW)**, teniendo en cuenta el menor de los datos para empezar el histograma y que las barras se observen completas en la pantalla. Observe nuevamente la gráfica con **♦R (GRAPH)**.

#### 5. Distribución de frecuencias

- Por medio de **F3 (Trace)**, determine para cada barra del histograma los límites inferior y superior y la frecuencia, esto es, el número de datos que son mayores o iguales que el límite inferior y menores que el límite superior. Es posible pasar de una barra hacia otra con las flechas derecha - izquierda del cursor. Llene una tabla como la siguiente:

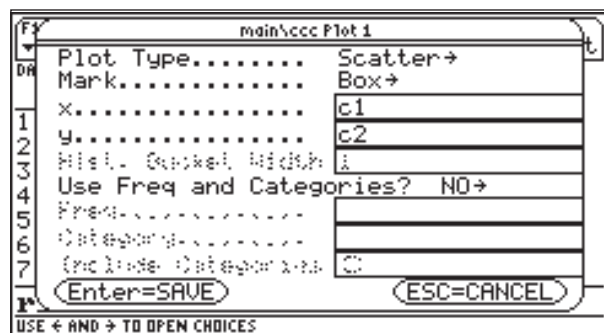


Figura 3

Intervalo	Frecuencia

### 6. Diagrama de cajas

Al final de esta página se muestra un diagrama de cajas. Observe la información que se puede obtener a partir de él.

- Para construir el diagrama de cajas de los datos con los que está trabajando, regrese al editor de datos (APPS, 6: Data/Matrix Editor, 1: Current) ¡Elija Current y no New!
- Nuevamente seleccione F2 y defina Plot2 por medio de F1. Seleccione en Plot Type 3: Box Plot. Indique que los datos de la variable x se introdujeron en la columna c1. Oprima ENTER.

- Puesto que por ahora no estamos trabajando con frecuencias predeterminadas, a la pregunta Use Freq and Categories?, responda NO y oprima ENTER.
- Con  $\blacklozenge$ R (GRAPH) observe el diagrama de cajas. Oprima F3 y con las flechas del cursor arriba - abajo ubíquese en el diagrama de cajas. Con las flechas derecha - izquierda del cursor puede observar los valores min, Q1, med, Q3 y máx.
- Relacione el diagrama de cajas con el histograma.

### 7. Presentación de los datos agrupados en el editor de datos

- Regrese al editor de datos (APPS, 6: Data/Matrix Editor 1: Current) ¡Elija Current y no New!

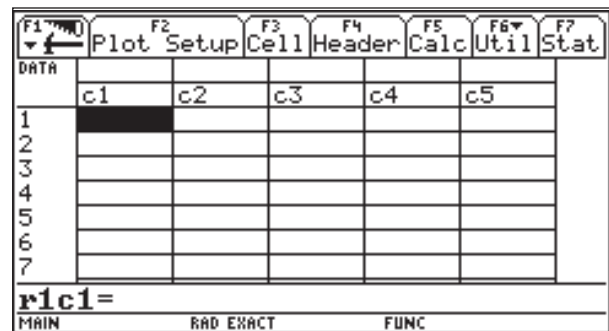
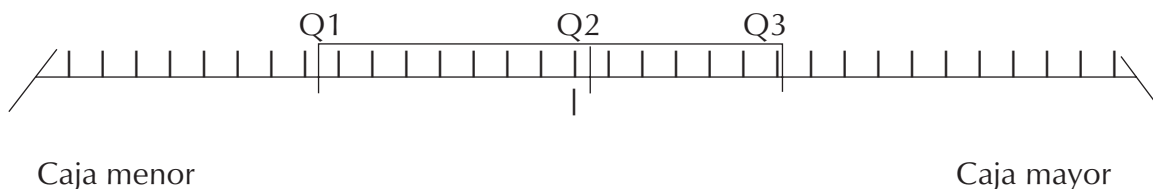


Figura 4

- Digite los datos en las siguientes columnas. A cada intervalo haga corresponder una fila. c2: Límite inferior de cada clase. c3: Límite



superior de cada clase. c4: Frecuencia de cada clase. c5: Frecuencia acumulada.

La frecuencia acumulada de cada clase indica el número de datos que son menores que el límite superior de la misma. Para encontrar la frecuencia acumulada de cada clase ubíquese sobre la celda marcada con c5 y oprima  $2^{\text{nd}} +5$  (MATH), seleccione `3:List` y luego `7:cumSum(`, y escriba c4.

## 7. Ojiva

- La ojiva es una representación gráfica en la cual se hace corresponder a los límites superiores de cada intervalo la respectiva frecuencia acumulada. Prediga la forma de la gráfica.
- En el editor de datos (`Data/Matrix Editor`), seleccione `F2`, desactive el diagrama de cajas con `F4` y con `F1` defina `Plot 3`. Seleccione en `Plot Type`, `2:xyline`. Para la variable  $x$ , indique los límites superiores (c3) y para la variable  $y$  las frecuencias acumuladas (c5). Por ahora no incluimos trabajo con el uso de frecuencias y categorías. Oprima `ENTER` dos veces consecutivas.
- Observe la gráfica con `◆R` (GRAPH) y ajuste los valores con `◆E` (WINDOW); asigne como valor `xmin` el mismo que utilizó para el histograma.
- Relacione la ojiva con el histograma. Observe cómo varía la ojiva cuando la barra es más alta y cuando la barra es más baja.
- A partir de la ojiva, moviendo el cursor, se puede interpolar para determinar cuántos datos del conjunto son menores que algún valor determinado. Si desea mayor precisión, en `F2`, seleccione `1:ZoomBox`, e indique el tramo de la ojiva al que le va a aumentar el tamaño.

## 8. Algunos ejercicios

- **Marcas de clase.** La marca de clase de cada intervalo es el valor que se encuentra exactamente en la mitad entre el límite inferior y el superior. Ubíquese sobre la celda marcada con c6 para que en dicha columna registre la marca de clase de cada clase. ¿Cómo puede hallar la marca de clase a partir de los límites de la misma?
- **Polígono de frecuencias.** El polígono de frecuencias es una representación gráfica que hace corresponder a cada marca de clase la frecuencia de la respectiva clase. Construya la gráfica y compárela con el histograma. Determine cuál es el valor del que se puede afirmar que se repite con mayor frecuencia, esto es, la moda del conjunto.
- **Frecuencia relativa.** La frecuencia relativa de cada clase es el porcentaje de datos con respecto al total que corresponde a cada intervalo. ¿Cómo podría calcularlo en la tabla del editor? Hágalo en c7.
- **Frecuencia relativa acumulada.** La frecuencia relativa acumulada de un intervalo es el porcentaje de datos que es menor que el respectivo límite superior. ¿Cómo podría calcular en la tabla del editor dicha frecuencia? Hágalo en c8.
- **Ojiva porcentual.** Construya una gráfica que haga corresponder a cada límite superior la frecuencia relativa acumulada de la respectiva clase.
- **Percentiles.** ¿Cómo podría determinar a partir de la ojiva porcentual, el porcentaje

de datos que supera al 70%? A esto se le llama el percentil 70,  $P_{70}$ . Intente con otros percentiles, calcúlelos e interprételos.

## 9. Cálculo de algunos valores representativos del conjunto con el uso de las frecuencias

- Como ya vimos, al oprimir F5 se obtiene una pantalla a través de la cual es posible hallar diferentes medidas para el conjunto.
- En el menú `Calculation Type` seleccione 1: `Onevar`, ya que vamos a hacer cálculos con una sola variable. Indique para la variable  $x$  que los datos, en este caso las marcas de clase que son los representantes de cada clase, han sido introducidos en la columna c6. Oprima ENTER

para aceptar. Como ahora tendremos en cuenta las frecuencias de las clases, a la pregunta `Use Freq and Categories?`, responda SI e indique que las frecuencias se han ingresado en la columna c4. Ahora oprima ENTER.

- Observe los valores de la media, la desviación estándar de la muestra, los cuartiles  $Q_1$  y  $Q_3$  y la mediana. Justifique por qué la mediana es el mismo cuartil  $Q_2$ . Interprete los resultados obtenidos. Compare la media y la desviación estándar de la muestra con los valores obtenidos para otros conjuntos por los demás compañeros.

Compare los valores obtenidos de la muestra con los valores obtenidos para el mismo conjunto cuando no se utilizaron datos agrupados. ¿Qué ventajas y qué desventajas tiene trabajar con datos agrupados?

# Fundamentación cognitiva del currículo de matemáticas<sup>5</sup>

**Luis Moreno Armella, Guillermina Waldegg**  
CINVESTAV - IPN, México

## 1. Introducción

Las expectativas de cambio en las sociedades contemporáneas se han visto afectadas, en mayor o menor medida, por la apertura hacia un nuevo siglo, y es la educación el campo en donde confluyen mayormente estas expectativas. Las sociedades han comprendido que el futuro está íntimamente ligado a la educación. Ya escuchamos de manera reiterada las voces que nos invitan a imaginar *la sociedad de la información y del conocimiento*.

Si se quiere que estas expectativas se vean colmadas, los sistemas educativos tendrán que entrar en resonancia con los inmensos desarrollos científicos y tecnológicos de las últimas décadas y así, prepararse para dar respuesta a las necesidades educativas inmediatas y abrirse a lo nuevo e inesperado. Por lo tanto, los sistemas educativos tienen un gran desafío: lograr la transformación de sus estructuras curriculares, entendiendo que éstas ya no pueden depender totalmente de los contenidos temáticos, como ha sido tradicional, sino de un desarrollo cognitivo en sus individuos que incorpore el fortalecimiento de actividades como la

generalización, la sistematización y la abstracción. Los estudiantes, cada vez más, tienen necesidad de enfrentarse a la resolución de problemas, no sólo en el ámbito escolar sino en sus futuros lugares de trabajo, en donde la creatividad y la innovación serán la moneda de cambio. Los estudiantes necesitan instrumentos de aprendizaje, es decir, estructuras cognitivas con alto grado de adaptabilidad a lo nuevo. Esta necesidad refleja una dimensión central del proceso de educación continua en el que cada día estaremos inmersos.

Cuando la sociedad discute los fines de la educación, incluye entre sus propósitos acciones que conducen a modelar las conductas, vocaciones, conocimientos y valores de sus miembros, en función de las capacidades individuales. Desde luego, esto lo hace a partir de sus propios objetivos: si una sociedad se propone educar sólo a sus élites, el profesor, como único recurso, puede bastar para la consecución de estos fines. Empero, el problema se hace más complejo cuando una sociedad se ve a sí misma como una sociedad en desarrollo

<sup>5</sup> Capítulo 3 del libro *Didáctica de las Matemáticas*, Editorial Síntesis, Madrid, Luis Rico (ed).



que busca dotar a todos sus miembros de una educación que privilegie los valores democráticos y la confianza en un bienestar salido del progreso científico y tecnológico.

Es en este último caso en el que la psicología ha tenido un papel principal en el curso del siglo veinte. La psicología ha puesto el énfasis en la necesidad de conocer las capacidades intelectuales, tanto individuales como compartidas de los estudiantes para, a partir de ese conocimiento, garantizar las condiciones mínimas de acceso a la educación a todos los miembros de la sociedad. Con ello se hace manifiesto el compromiso de esta disciplina con las sociedades democráticas y con los avances científicos y tecnológicos.

La psicología hace su aparición en el campo de la educación por la vía de los tests. Su propósito, en aquel momento, era detectar a los niños que no estaban en posibilidades de seguir una escolaridad “normal”, para proponerles una formación específica alternativa. La base teórica de los tests era restringida: se trataba de escalas esencialmente descriptivas que permitían ubicar al individuo entre otros semejantes en función de su nivel de desarrollo. La evaluación diagnóstica se proponía, adicionalmente, hacer una predicción del comportamiento y del éxito individual, valorando la medida en la que un niño o un adolescente podría alcanzar tal o cual nivel de ejecución. Estos tests diagnósticos todavía juegan un papel importante al interior de la institución escolar, aunque su impacto disminuye progresivamente.

Los instrumentos elaborados con fines diagnósticos dieron un gran espacio a los conocimientos culturales y a la adaptación a la vida cotidiana, surgiendo de allí aplicaciones más

directamente relacionadas con el desempeño escolar y con el currículo.

Hacia mediados del presente siglo, surgieron, en el panorama internacional, los primeros encuentros que se proponían discutir resultados de la investigación psicológica en el campo de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, dando lugar con ello a un nuevo campo de investigación. Inicialmente, esta nueva investigación se orientó hacia los llamados errores de comprensión. Siguiendo la antigua tradición normativa de la didáctica, estos resultados condujeron a la decisión de tratar de modificar, no las estrategias de aprendizaje, sino las estrategias de enseñanza que permitieran superar las deficiencias.

En este caso, el enfoque tenía como hipótesis de base una concepción del conocimiento matemático según la cual, el significado de un enunciado es único y, en consecuencia, lo importante es saber transmitirlo para que un estudiante lo comprenda. Sin embargo, el hecho de que los estudiantes desarrollen formas de conocimiento que no coinciden con los contenidos escolares oficiales está en abierto contraste con aquella supuesta transparencia del conocimiento.

El reconocimiento de que el problema no es exclusivamente atribuible a la enseñanza inclinó el interés investigativo hacia el estudio de las *construcciones intelectuales del estudiante*, es decir, de las maneras en las que el estudiante recoge, procesa e interpreta la información que recibe por diversas vías, en particular, dentro de un contexto escolar. El movimiento *constructivista* en la educación fue ganando terreno, en buena medida, porque encontró una base de sustentación teórica en las tesis epistemológicas constructivistas de la escuela piagetiana.



Como veremos más tarde, la psicología de la educación se encuentra hoy en una posición muy distinta a la que le dio origen, e incluso a la que floreció dentro del paradigma piagetiano. Tanto las investigaciones como la práctica docente han puesto en evidencia que:

- i) Los estadios del desarrollo individual, propuestos por la teoría de Piaget, contienen una parte muy importante de resultados que apelan a conocimientos culturales. Por ello, no pueden evaluarse los logros cognitivos de los alumnos al margen de las influencias del medio.
- ii) Ciertas actividades escolares pueden presentar dificultades específicas, por ejemplo, el aprendizaje de la lectura, que con frecuencia da lugar a un tipo de fracaso en alumnos intelectualmente muy dotados.
- iii) El nivel intelectual medido por los tests aumenta regularmente cada cincuenta años, lo que conduce a preguntarse por los orígenes de este crecimiento y, de hecho, por las relaciones entre las capacidades que se pueden definir con independencia de las influencias del medio y de sus demandas, aportes y sanciones.

Estos hechos se encuentran entre los que han conducido a la psicología cognitiva a estudiar un cierto número de actividades complejas, como la lectura, la composición de textos, la numeración, la resolución de problemas, y otras, menos conocidas en este campo, como la música o el dibujo. Estos estudios han puesto en evidencia hechos que proporcionan resultados nuevos y fundamentales para los aprendizajes escolares. Así, la investigación en psicología cognitiva no sólo ha contribuido a acrecentar nuestra comprensión de las dificultades de ciertos aprendizajes escolares, sino que ha permitido concebir actividades e instrumentos que

pueden —de manera modesta pero real— prevenir el fracaso escolar.

Gracias a las competencias técnicas que ha elaborado durante las últimas décadas, la psicología puede contribuir a diagnosticar dificultades y a proponer actividades, pero también puede ayudar a concebir situaciones y herramientas pedagógicas nuevas, adaptando los resultados de la investigación y poniéndolos a disposición de los profesores. Más aún, el cuerpo de conocimientos desarrollado por la psicología cognitiva permite extender el papel de los equipos pedagógicos, al proporcionar elementos teóricos y metodológicos para la elaboración de planes y programas de estudio y de secuencias didácticas.

A continuación, proponemos una revisión de las principales teorías que han explicado el aprendizaje durante el último siglo. Con ello no intentamos agotar el tema, sino dar al lector un mapa que le permita reconocer el panorama teórico en el que se sitúa la definición y el desarrollo de los contenidos escolares que debe enseñar.

## 2. Aprendizaje y conducta

Las diversas teorías de la cognición están de acuerdo en atribuir al individuo una capacidad esencial: la capacidad de aprender. Los puntos de vista divergen, empero, en lo que respecta a la naturaleza del aprendizaje.

Para los conductistas, los aprendizajes están regidos por una serie de leyes generales que pueden ser descubiertas a partir de hechos observables. El aprendizaje está definido como la modificación de la conducta por la experiencia y el estudio del aprendizaje, como la ciencia del comportamiento. No obstante, gradualmente los psicólogos han

reconocido la necesidad de ir más allá de los fenómenos observables y de ocuparse de los procesos mentales que subyacen a los comportamientos. El concepto de conducta se vio entonces cuestionado, acotando las teorías conductistas clásicas.

## 2.1 El conductismo

El conductismo se instauró, hacia los años cincuenta del siglo veinte, como una propuesta metodológica y como una teoría del aprendizaje. Inspirado en el paradigma positivista de la física clásica, el conductismo propuso un modelo de aprendizaje de tipo asociativo:  $E \rightarrow R$ . Los Estímulos (exteriores) llegan al individuo quien produce las Respuestas (internas o conductuales). La instalación de nuevas conductas por repetición de asociaciones  $E \rightarrow R$  define el aprendizaje por condicionamiento. Éste es un proceso mecánico en el que el repertorio de comportamientos del aprendiz está determinado por los reforzamientos que el medio proporciona: se recompensan y reproducen las “buenas” respuestas y las “malas” se castigan y son abandonadas. Bajo esta perspectiva, el proceso constituye una forma elemental de aprendizaje cuyo campo de aplicación se vincula tanto con el desarrollo de hábitos y conductas relacionadas con las emociones, como con aprendizajes complejos.

El condicionamiento instrumental (Skinner, 1904-1990) se distingue del condicionamiento clásico pues incorpora la actividad del individuo. El aprendiz establece, él mismo, la relación entre dos sucesos, entre un comportamiento y una respuesta. Si el comportamiento da lugar a una satisfacción, será reproducido. En caso contrario, será abandonado. Esta concepción del

aprendizaje proporcionó a Skinner los principios de la enseñanza programada.

## 2.2 Aportaciones y límites del conductismo

El esquema  $E \rightarrow R$  permitió hacer progresos en el conocimiento de las leyes funcionales y elementales que rigen los aprendizajes simples, pero se constituyó en un reduccionismo de la realidad psicológica. El hecho de haber sido puesto a prueba en el comportamiento animal y, principalmente, en conductas motrices, limita la aportación de la teoría conductista. Al excluir del análisis los procesos mentales de los individuos, y al excluir de su interés los procesos mentales internos que les da sustento, el conductismo no permite dar cuenta de aprendizajes complejos, como la adquisición del lenguaje o del razonamiento lógico-matemático.

El conductismo puso el acento en la dimensión cuantitativa de los saberes; de ahí que privilegió la fragmentación de los contenidos y de las tareas, y la jerarquización de los conocimientos, que debían ser adquiridos en un orden lineal y acumulativo, a menudo carente de una visión de conjunto.

El punto más débil de este enfoque radicaba en el hecho de que se desatendía de las condiciones en las cuales se realizan las adquisiciones. Sin embargo, las nuevas tendencias del conductismo, conocidas como neoconductismo, aunque mantienen las tesis básicas que les dieron origen, conceden que se debe otorgar un peso en las explicaciones al papel de los factores emotivos y mentales del individuo; de esta manera, buscan no sólo comprender el patrón  $E \rightarrow R$ , sino explicar también los factores de *mediación* que intervienen entre el estímulo y la respuesta.

### 3. El niño como centro del proceso de aprendizaje: el enfoque Piagetiano

Los trabajos de Piaget y de sus seguidores inauguraron una perspectiva para el estudio del aprendizaje radicalmente nueva. Desde ese momento el niño pasó a ocupar el centro de las preocupaciones de los psicólogos de la educación y aun del sistema educativo en su conjunto. Se puso el acento en las capacidades cognitivas del niño que le permiten comprender las situaciones y sacar provecho de las enseñanzas. Sin embargo, todo sucedía como si el desarrollo del niño siguiera un curso autónomo, poco o nada sensible a las influencias del lenguaje, de la sociedad y de la cultura. Desde la perspectiva piagetiana, la determinación del nivel de desarrollo del niño se volvió crucial, en tanto que este nivel condicionaba la posibilidad del niño para aprovechar tal o cual aporte de conocimientos y para operacionalizar tal o cual modo de funcionar.

#### 3.1 Antecedentes

Para entender la presencia de la teoría piagetiana como una nueva manera de mirar los fenómenos de la cognición (y eventualmente de la educación), que reacciona ante el reduccionismo conductista, conviene ubicarnos en una perspectiva histórica.

En su *Crítica de la Razón Pura*, Kant afirma que, al entrar en contacto con su objeto de conocimiento, el sujeto recibe impresiones sensibles que somete a un proceso organizador. Esto lo hace, según Kant, mediante sus estructuras cognitivas innatas. Así como un líquido adopta la forma del recipiente que lo contiene, así también las impresiones sensoriales adoptan las formas que les son impuestas por las estructuras cognitivas que las pro-

cesan; el resultado de este procesamiento es el conocimiento. La capacidad cognoscitiva (lo que es capaz de aprender y comprender) del sujeto tiene como límites aquellos que le son impuestos por el dominio de su experiencia.

De manera muy abreviada, podemos decir que hay dos consecuencias fundamentales del enfoque kantiano que incumben al proceso educativo. La primera es que el conocimiento deja de ser concebido como representación, como copia de una realidad externa y, en su lugar, el conocimiento se concibe como resultado de la interacción entre el sujeto (provisto de sus estructuras o instrumentos cognitivos) y sus experiencias sensoriales. La segunda consecuencia es que el sujeto ya no es pasivo frente al objeto de su conocimiento. A esta solución kantiana le hacía falta contestar a la pregunta: ¿de dónde provienen los instrumentos cognitivos que sirven para transformar en conocimiento las experiencias del sujeto?

La epistemología constructivista piagetiana ha sido una de las respuestas más elaboradas a este interrogante. Sin proponérselo explícitamente, dicha epistemología se constituyó en una base de sustentación para el constructivismo desde la perspectiva de la educación. Sin embargo, las tesis epistemológicas de este constructivismo fueron, con frecuencia, trasladadas mecánicamente al campo educativo dando como resultado una especie de “deslizamiento” desde la epistemología hacia la didáctica.

En su versión constructivista, la epistemología viene provista de una base experimental constituida por la historia de la ciencia y ciertos experimentos psicológicos, que quedan enmarcados en la llamada psicología genética.

Es muy importante diferenciar con precisión esta doble naturaleza del soporte experimental propio de esta versión de la epistemología, que surgió con pretensiones de sacar a la epistemología del terreno de la especulación filosófica y colocarla en el campo de la reflexión científica.

La epistemología piagetiana está construida alrededor de categorías básicas de la ciencia: espacio, tiempo, causalidad, principio de conservación de la materia, el número, etc. Piaget realizó investigaciones decisivas sobre estas categorías, desde la perspectiva de la historia de las ideas, que lo llevaron a una explicación de la racionalidad científica con características identificables por lo menos en el pensamiento occidental.

Sin embargo, Piaget siempre consideró necesario dar una sustentación experimental a sus aseveraciones de orden epistemológico. Entonces, su “laboratorio epistemológico”, constituido por la historia de la ciencia se vio ampliado con las investigaciones psicológicas que le dieron un lugar en la historia de la psicología infantil. En este campo, Piaget dio la demostración empírica de que la mente infantil tiene su propia lógica y no es, como se pensaba, una versión a escala de la mente adulta. Por el papel evolutivo que Piaget otorga al desarrollo cognitivo del niño, su teoría psicológica fue bautizada como *psicogenética*.

Uno de los resultados más conocidos de este acercamiento teórico, que tuvo mayores repercusiones en la enseñanza de las matemáticas, se refiere a la evolución del concepto de número en el niño: el acceso a la llamada *conservación* parecía determinante para la comprensión de la cardinalidad y de las operaciones aritméticas. Se concluía entonces que los usos anteriores de conteo y numera-

ción sólo eran manifestaciones verbales, sin interés y sin repercusión para el aprendizaje. Con ejemplos como éste, la psicología se encontró así, durante un breve periodo, en posición de determinar, al menos para ciertos sectores disciplinarios, los contenidos y la organización curricular de aquello que se debía enseñar.

La psicología piagetiana surgió en oposición a la concepción conductista, buscando construir una ciencia de la cognición a partir del estudio empírico de la estructura y funcionamiento del sistema cognitivo. Este acercamiento se presenta, ante todo, como una psicología del conocimiento. Podemos pasar la psicología piagetiana por el cristal de la epistemología correspondiente. Dicha psicología, como hemos visto, responde a las necesidades del programa epistemológico como parte sustancial de su metodología. Lo que vemos, una vez pasada la psicología por ese cristal, son las componentes estructuralista, constructivista e interaccionista de dicha teoría psicológica.

### 3.2 *La componente estructuralista*

Para Piaget, el aprendizaje consiste en el pasaje de un estado de menor conocimiento a un estado de mayor conocimiento. Piaget postula la existencia de una serie de organizaciones internas de la experiencia y de la información previa del sujeto (sus *estructuras cognitivas*), que son cada vez más poderosas y permiten integrar la información de modos crecientemente complejos. Las estructuras cognitivas evolucionan hacia un pensamiento cada vez más estable, que es capaz de incorporar en sus explicaciones un número creciente de situaciones del mundo físico y del entorno cognitivo. Piaget intenta explicar los mecanismos de adquisición y de utiliza-



ción de los conocimientos a partir de la génesis de las operaciones lógico-matemáticas subyacentes a toda actividad intelectual.

Las etapas sucesivas del desarrollo cognitivo del niño, son el resultado –según Piaget– de la experiencia y de la acción del sujeto que actúan como motores de la construcción, e incluso de la reconstrucción, de las representaciones internas que el niño se hace del medio físico, inicialmente percibido y comprendido de manera intuitiva.

Piaget sostiene que, en lo esencial, el desarrollo cognitivo parte de la puesta en marcha de conocimientos concretos, sostenidos primero en representaciones inmediatas y posteriormente en hipótesis (construcción de la inteligencia abstracta). Se trata de un largo proceso de organización del mundo marcado por adquisiciones relacionadas con los conocimientos y con la utilización de sistemas de relaciones entre los objetos (clasificaciones, seriaciones), entre los objetos y el sujeto (el tiempo y el espacio), y finalmente entre los objetos, el sujeto, el tiempo y el espacio.

### 3.3 *La componente interaccionista*

Los progresos en la adquisición del conocimiento resultan, en realidad, de una construcción en la que el sujeto es responsable directo de su aprendizaje. Actuando sobre el medio, el sujeto reconstruye el mundo físico y social que le rodea, lo representa y lo objetiva. En uno de sus primeros libros (1923), Piaget logró expresar esta posición de manera muy elocuente:

*(...) el conocimiento del mundo exterior comienza por una utilización inmediata de las cosas (...) la inteligencia no comienza así ni por el conocimiento del*

*yo ni por las cosas en cuanto tales sino por su interacción y orientándose simultáneamente hacia los dos polos de esa interacción, la inteligencia organiza al mundo organizándose a sí misma (Piaget, 1983).*

El conocimiento se define entonces como el producto de la elaboración de la experiencia a la que se confronta el sujeto.

El ser humano está condicionado por su entorno físico y social. Las perturbaciones que resultan de la interacción con su entorno, tanto social como material, le plantean la necesidad de construir estructuras cognoscitivas, que cada vez respondan mejor a los problemas que le plantea su medio.

La adaptación del sujeto al medio (social y material) pone en juego dos mecanismos fundamentales: la *asimilación* y la *acomodación*. La asimilación consiste en una familiarización de los datos del mundo exterior con el fin de hacerlos integrables a la estructura propia del sujeto; el entorno entonces “tiende a conformar” la estructura del niño. A la inversa, la acomodación corresponde a un ajuste del sujeto a los datos del entorno.

Los dos procesos, asimilación y acomodación, son indispensables e interactuantes a lo largo de todo el desarrollo pues van contribuyendo al logro de estructuras cognoscitivas que progresivamente permiten al sujeto una mejor interacción con su mundo material y sociocultural.

### 3.4 *La componente constructivista*

Al señalar el lugar de la actividad como factor determinante del incremento en los conocimientos, Piaget recuerda que la maduración y la influencia social no son ajenas a este proceso. El desarrollo de los aprendizajes es

igualmente la consecuencia de un cuarto factor: la *equilibración*.

La equilibración de las estructuras cognitivas traduce el pasaje de un estado de menor equilibrio que resulta de respuestas del sujeto a las perturbaciones exteriores, hacia un estado de equilibrio superior que corresponde a posibilidades nuevas derivadas de una estructura cognitiva más poderosa. Así, en el dominio del desarrollo lógico-matemático, ilustrado por la adquisición de las conservaciones, Piaget muestra que, en el curso del desarrollo, el niño pasa por tres momentos claves: las perturbaciones (en el caso de la conservación de la sustancia, constata el alargamiento de una salchicha de arcilla y su adelgazamiento, pero no conecta todavía estos dos fenómenos); las compensaciones (el niño puede ahora asociar o coordinar los dos datos: alargamiento y adelgazamiento), finalmente, la puesta en correspondencia matemática (*no se quita ni se agrega nada*, el alargamiento de la salchicha proviene de lo que ha perdido de espesor). En el conjunto del desarrollo, los progresos en el conocimiento resultan de una construcción en la que el sujeto es actor de sus aprendizajes en interacción con el mundo. La concepción del aprendizaje es resueltamente *constructivista*. Actuando sobre el medio, el sujeto reconstruye el mundo físico y social que le rodea, lo objetiviza y lo representa.

### 3.5 *Aportes de la teoría piagetiana a la educación*

Aunque Piaget se haya interesado mucho en la educación, su trabajo no contempla explícitamente este campo de acción. No obstante, el modelo de desarrollo intelectual que propone, ofrece un cuadro de reflexión útil para la educación. Tan es así que la puesta en

evidencia, que logra Piaget, del papel del conflicto cognitivo confiere al acercamiento piagetiano una dimensión educativa considerable. El conflicto cognitivo expresa la idea según la cual la toma de conciencia por parte del individuo de que existe una respuesta diferente a la suya en una situación particular provoca una tensión interna de naturaleza cognitiva.

Piaget proporciona un ejemplo de esta situación con el *concepto de conservación*. Las conservaciones ponen al descubierto la existencia de algo invariante bajo el efecto de alguna transformación. En la práctica, se presenta al sujeto dos entidades  $A$  y  $B$ , perceptualmente iguales (por ejemplo, dos recipientes idénticos que contienen la misma cantidad de líquido). Se obtiene el acuerdo del niño sobre esta igualdad. Después se mantiene  $A$  sin cambio mientras que  $B$  se transforma en  $B'$  por una modificación que sólo afecta la apariencia perceptual (por ejemplo se trasvasa el líquido de  $B$  a  $B'$  que es un recipiente más largo y más estrecho). Se le pregunta al niño si  $B'$  es igual a  $A$ . Las respuestas varían en función del estadio de desarrollo: en un primer estadio (estadio pre-operatorio), el niño se centra en una sola de las dos dimensiones sin coordinarlas entre sí (por ejemplo, toma en cuenta la altura del recipiente, pero “olvida” constatar que lo más alto es también más estrecho). A partir de cierto momento en su desarrollo, el niño se centra en dos dimensiones a la vez y logra coordinarlas. De este modo logra vencer al conflicto cognitivo suscitado por la situación que se le ha presentado.

Piaget definió a la escuela como un entorno que debe estimular y favorecer el proceso de auto-construcción; el profesor, convertido en un mediador entre los conocimientos y el

aprendiz, debe facilitar el descubrimiento de nociones y la elaboración del saber y del saber-hacer, más que presentarlos bajo una forma preestablecida. El maestro tradicional pone el acento en los aspectos figurativos del pensamiento y considera el desarrollo cognitivo como una acumulación lineal de conocimientos o técnicas enciclopédicas. La concepción heredada del modelo piagetiano es muy diferente: se refiere a aprender a pensar y a valorar los aspectos operativos del pensamiento (procesos internos, operaciones mentales), a hacer experimentar al niño, a favorecer la manipulación con el fin de hacer surgir leyes generales. Según esta concepción, la simple observación de la realidad es insuficiente para la estructuración de los conocimientos. La actividad desplegada por el aprendiz se convierte así en una poderosa fuente de motivación, necesaria para la construcción del conocimiento.

### **3.6 Los límites del modelo piagetiano**

El modelo piagetiano tiene sus límites. Uno de ellos, que surge cuando se trata de trasladar sus aportes al campo educativo, consiste en *que no es una teoría de la construcción escolar*. La teoría piagetiana es esencialmente una teoría epistemológica, y como tal minimiza el papel de la cultura en la cognición. Muchos de sus resultados cognitivos son presentados como independientes de la cultura a la cual pertenezcan las personas. Se supone que el pensamiento es algo que ocurre exclusivamente en la cabeza de los individuos, que la comprensión del mundo depende sólo de las estructuras lógicas dentro de las cuales se integra toda la experiencia. Esta posición es altamente reminiscente de la posición kantiana según la cual toda la experiencia se pasa

por el molde de las estructuras cognitivas que son intrínsecas a los individuos. Al subordinar de este modo el aprendizaje, Piaget desestima el papel de los sistemas de representación (lenguaje, memoria,...). Ahora bien, un sujeto que busca adaptarse a situaciones del entorno debe, ante todo, manipular la información simbólica. De allí la importancia del lenguaje y de los demás sistemas semióticos de representación. Por otra parte, al dar un lugar predominante a la actividad del sujeto Piaget no concede toda la importancia al papel que juegan las diferencias entre individuos y que son resultado de las influencias sociales.

Las teorías educativas actuales sostienen que las personas han de ser concebidas dentro del marco de una relación dialéctica con sus tradiciones, bajo la influencia de valores e ideas y, al tiempo, como modeladoras de esas tradiciones. Quizá pueda decirse que la cultura es resultado de las interacciones dialécticas entre la cognición y las tradiciones. Una persona no alcanza su mayor grado de desarrollo cognitivo si no existe una dinámica externa a ella que la estimula a lograrlo. No puede explicarse el desarrollo cognitivo sólo desde la perspectiva de una dinámica que proviene de la intimidad del individuo.

## **4. Aspectos sociocognitivos del aprendizaje: la teoría de Vygotsky**

Comprender el papel del entorno social en el aprendizaje del individuo es una de las ambiciones mayores de la psicología de la educación.

Las corrientes de investigación que comparten la tesis de que la interacción del indivi-

duo con el medio social es determinante de sus adquisiciones cognitivas, se apartan de los acercamientos que privilegian la dimensión intra-individual del aprendizaje (como la teoría piagetiana). Al hacer explícita la influencia de variables sociales y culturales en el funcionamiento cognitivo del individuo, las corrientes sociocognitivas renuevan la reflexión sobre la organización de las situaciones escolares.

#### **4.1 El modelo sociocultural**

Las tesis desarrolladas por Vygotsky sobre la construcción social de las funciones cognitivas tienen hoy día una repercusión importante en la psicología del desarrollo. Igualmente, inspiran el campo de la educación por el papel relevante que atribuyen a la intervención del adulto en la progresión de los aprendizajes del estudiante.

Vygotsky inscribe la pregunta sobre el desarrollo cognitivo en una perspectiva a la vez histórica y cultural. La tesis de la internalización de las capacidades humanas insiste en el hecho de que, en el origen del desarrollo, los conocimientos que se van a adquirir son exteriores al individuo y están materializados en las obras humanas: la literatura, las obras de arte, el lenguaje y demás sistemas semióticos de representación. El desarrollo cognitivo se concibe entonces como la apropiación, por parte del individuo, de las actividades humanas depositadas en el mundo de la cultura. El mundo social influye en el sujeto a través de otros sujetos, de los objetos socioculturales, de las prácticas que han sido creadas por generaciones anteriores. Dos componentes tienen un papel primordial en este proceso: los sistemas semióticos de representación y la interacción social.

#### **4.2 Los sistemas semióticos de representación**

Para Vygotsky, el desarrollo de las funciones mentales superiores –la memoria, el lenguaje, la conciencia– sólo es posible a través de los sistemas semióticos, por ejemplo, la escritura, los números, el habla. Verdaderos instrumentos de la construcción psicológica, los sistemas de signos tienen, en el tratamiento del conocimiento, un papel análogo al de las herramientas técnicas en la manipulación del mundo físico. En la perspectiva Vygotskyana, el aprendizaje de los sistemas de signos es una apuesta capital del desarrollo individual. El papel de los signos es fundamental, en la medida en que hacen posible la “duplicación” interna del mundo. Es necesario el recurso de un sistema semiótico de representación (el lenguaje natural es el ejemplo prototípico) para pensar en las representaciones mentales de la persona. Las representaciones mentales, pues, no son independientes de la asistencia de un sistema de representación externa. Tampoco es posible la comunicación sin dichos sistemas. Tomemos como ejemplo típico la escritura, cuya apropiación y dominio no sólo permite expresar el pensamiento sino, sobre todo, organizarlo y regularlo.

#### **4.3 De lo inter-individual a lo intra-individual**

Vygotsky subraya que las actividades llevadas a cabo bajo la tutela del adulto son las que, en primer lugar, permiten los aprendizajes del niño. Los individuos progresan por apropiación de la cultura en las interacciones sociales. El descubrimiento del entorno, la acción sobre los objetos, pero también y sobre todo, la apropiación de los sistemas semióticos dependen de la mediación del otro. También las interacciones con los pares más



competentes, lejos de frenar el desarrollo de un pensamiento autónomo, le son necesarias.

Para el conjunto de estas dimensiones, el desarrollo cognitivo resulta de una doble formación: primero externa y después interna, en un movimiento que va de lo social a lo individual. Las capacidades del niño se manifiestan primero en una relación inter-individual donde el entorno social asegura la tutela sobre el niño descrita por Bruner (1983) como *“un proceso de asistencia o de colaboración entre el niño y el adulto”*. La detonación y el control individual (autorregulación) de las actividades sólo aparecen en un segundo tiempo, como resultado de un proceso de internalización favorecido por la repetición de las interacciones sociales. Así, *“cada función aparece dos veces en el desarrollo cultural del niño [...]: primero entre individuos (inter-psicológico) y, después, dentro del niño (intra-psicológico)”* (Vygotsky, 1986).

El lenguaje es el instrumento psicológico de primer orden que ocupa un lugar de privilegio en este esquema de desarrollo. Las primeras conductas y formas lingüísticas surgen y se desarrollan en el marco de situaciones iniciales de comunicación del niño con su entorno. Por medio de la interacción con los otros, el lenguaje cumple una función externa, que será progresivamente perfeccionada. Por ejemplo, en el desarrollo de los niños, el lenguaje exterior es internalizado transformándose entonces en lenguaje llamado *egocéntrico*. De este modo, se convierte para el niño en un modo de organizar sus propias acciones sobre el mundo. A medida que evoluciona el lenguaje internalizado, se va tornando una herramienta intelectual, un instrumento de planificación y de regulación de las actividades mentales.

La naturaleza del lenguaje egocéntrico en el desarrollo es un punto de divergencia entre Piaget y Vygotsky: para Piaget, es un signo de inmadurez destinado a evolucionar; para Vygotsky, es el instrumento de pensamiento destinado a progresar. Deben mencionarse, empero, los comentarios de Piaget en respuesta a las críticas de Vygotsky (véase la nota a pie de página, pp. 214-215, en Vygotsky, 1986), en los cuales modifica sus posiciones originales de la década de los veinte, expuestas en su obra *El Lenguaje y el Pensamiento en el Niño*, de 1923.

#### **4.4 Desarrollo cognitivo y educación**

El acercamiento Vygotskyano invierte el orden de las relaciones entre desarrollo, aprendizaje y educación, propuesto por Piaget. En la concepción piagetiana, las capacidades de aprendizaje dependen del nivel de desarrollo del individuo. En otras palabras, el desarrollo cognitivo condiciona las capacidades de aprendizaje. Vygotsky sostiene, por su parte, la causalidad inversa: *“La característica predominante de nuestra hipótesis es la noción de que los procesos de desarrollo no coinciden con los de aprendizaje sino que siguen a estos últimos”* (Vygotsky, 1986).

En la edad escolar, los aprendizajes de orden superior, forman la substancia del desarrollo cognitivo. Este último es una consecuencia tributaria de los aportes de la enseñanza: el desarrollo en la edad escolar sólo es posible gracias a la enseñanza, las funciones psíquicas sólo pueden desarrollarse gracias a ella. A partir de aquí, la atención a las necesidades del niño debe identificarse con la satisfacción de sus necesidades cognitivas. En esta lógica, Schneuwly (1995) traza tres líneas directrices para la enseñanza escolar: la ruptura con la experiencia común del sujeto;

la descontextualización de los contenidos y la diferenciación de las disciplinas. Por una parte, sólo las situaciones de ruptura con la experiencia cotidiana pueden dar las condiciones de acceso a las formas superiores del saber y del saber-hacer; por otra parte, la generalización de las nociones y su descontextualización sólo pueden ser verdaderamente aprendidas dentro del marco de las disciplinas formales que organizan los conocimientos en sistemas lógicos.

Son los procesos de ruptura con la experiencia cotidiana y los procesos de descontextualización los que aseguran el acceso a los conceptos científicos. En la manipulación cotidiana de los objetos, el niño construye nociones sobre el mundo, los conceptos llamados espontáneos reflejan un conocimiento concreto, una práctica atórica, con validez sólo local. La actividad escolar, en el marco de las disciplinas, permite al alumno la construcción de los conceptos científicos y su manipulación teórica.

#### **4.5 La zona de desarrollo próximo**

Considerar que el aprendizaje es la condición del desarrollo no significa que cualquier aprendizaje es posible en cualquier momento. La tesis de Vygotsky significa sobre todo que las capacidades de aprendizaje de un niño no deben ser confundidas con el nivel cognitivo que tiene en un momento dado. En un dominio cualquiera, existe un espacio potencial de progreso en el que las capacidades individuales pueden ser sobrepasadas si se reúnen ciertas condiciones. La asistencia del otro es una de estas condiciones. Este potencial de aprendizaje que se actualiza en la interacción social, define uno de los conceptos centrales de la teoría de Vygotsky: *la zona de desarrollo próximo*. La zona de desarrollo próximo es una componente crucial del pro-

ceso de desarrollo porque “presagia” y prepara lo que el niño más tarde realizará por sí solo: “lo que un niño puede hacer hoy en colaboración con otro, lo podrá hacer solo mañana” (Vygotsky, 1986). El aprendizaje antecede al desarrollo: la zona de desarrollo próximo asegura la vinculación entre ambos.

Favorecer las adquisiciones en el niño significa para el adulto llevar a cabo una transición de la actividad tutelar (o de conducción externa) a la actividad autónoma (de auto-conducción). Para hacer esto, debe ajustar los contenidos y las condiciones de instrucción, no a las capacidades actuales del niño, sino a su potencial de progreso. Así, para el conjunto de las adquisiciones, el adulto (en particular, el maestro) tiene la tarea compleja de trabajar sobre la base de la experiencia y de las posibilidades del niño. Relacionadas con la enseñanza escolar, estas orientaciones designan las interacciones maestro-alumno como el eje esencial de la organización pedagógica del aula.

#### **4.6 Preguntas para la Educación**

La tesis Vygotskyana tiene el interés principal de considerar la intervención social como el factor predominante del progreso cognitivo. Es necesario medir las implicaciones de tal posición para la educación escolar. La organización sociocognitiva de las situaciones escolares es una de las preocupaciones centrales de los autores que se inspiran hoy en Vygotsky e intentan prolongar sus tesis. Por ejemplo, para autores como Wertsch (1993) y Cole (1999), la psicología cultural tiene entre sus ejes articuladores el que las personas son agentes activos pero actúan en contextos que no son siempre de su elección –como la escuela, por ejemplo.

Los investigadores tienen la tarea de comprender cómo se articulan las dinámicas sociales e individuales en el desarrollo cognitivo. Particularmente, en relación a la problemática de la enseñanza y el aprendizaje en el aula, hay dos temas que merecen particular atención. El primero es la interacción tutelar maestro–alumno(s), situación de enseñanza y aprendizaje muy difícil de operacionalizar. Los ejemplos suministrados por la orientación de los aprendizajes iniciales del niño pequeño en el ambiente familiar se pueden transponer sólo parcialmente al aula; las modalidades de organización de la tutela escolar requieren de investigaciones específicas en profundidad. El segundo tema que es necesario estudiar en detalle es el de la zona de desarrollo próximo como “espacio de intervención didáctica”. La evaluación del potencial de aprendizaje del alumno, es decir, la estimación del progreso del que es capaz en una situación tutorial, es una de las dimensiones críticas de la puesta en funcionamiento escolar de esta noción.

La influencia del contexto escolar sobre los desempeños cognitivos del alumno ha sido analizada, en el pasado reciente, sólo en función de las condiciones de trabajo del alumno. Hoy en día, la atención se dirige hacia las características sociales de las situaciones escolares y hacia los significados que tienen estas situaciones para el alumno. Los trabajos de la psicología social de la cognición proponen un análisis relevante de esta problemática.

La actividad cognitiva no depende sólo de las propiedades intrínsecas del objeto de conocimiento, sino también de las condiciones sociales en las que tiene lugar. Pero la dimensión epistémica y la dimensión social no están desvinculadas: los objetos de nuestros aprendizajes siempre están social y cultural-

mente definidos. Se aprende en contextos sociales en donde no hay “objetos intrínsecos”, sino objetos que tienen funciones y significaciones atribuidas por la sociedad. Además, la cognición necesita un fuerte soporte de los instrumentos de representación y mediación, como lo son el lenguaje natural y los sistemas semióticos de representación. Desde esta perspectiva, hay que ampliar la noción de cognición y no verla tan sólo como “algo que ocurre en la cabeza del individuo” sino como algo que tiene una indudable connotación sociocultural. La cognición de un individuo se articula dialécticamente con la cognición de los demás, dando lugar a aquello que podemos llamar la *mentalidad* de una sociedad.

## **5. Las interacciones cognitivas en el aprendizaje escolar**

Las teorías seminales de Piaget y Vygotsky han dado lugar a una serie de variantes teóricas, ya clásicas, que buscan resolver las insuficiencias de los acercamientos iniciales para explicar, sobre todo, los procesos escolares.

La influencia benéfica de las interacciones sociales para las adquisiciones cognitivas ha sido demostrada experimentalmente por las corrientes de la psicología social del desarrollo cognitivo. El aporte principal de este punto de vista, es haber puesto en primer plano el papel que tiene el conflicto cognitivo para la construcción del conocimiento. En el plano de la educación escolar, la demostración de la efectividad de las confrontaciones entre los alumnos abre perspectivas de gran interés didáctico.

### **5.1 El conflicto sociocognitivo**

El acercamiento social del desarrollo cognitivo considera las interacciones sociales como

centrales para las adquisiciones cognitivas. En ciertos momentos claves para el desarrollo, se sostiene, las adquisiciones encuentran su origen principalmente en la confrontación de las acciones o de las ideas entre personas. Las adquisiciones engendradas socialmente en las interacciones, serán interiorizadas para su posterior movilización individual (de lo inter a lo intra-individual).

Los estudios experimentales realizados en este marco teórico (por ejemplo, los trabajos de Perret-Clermont, 1996) han mostrado que, para alcanzar el progreso cognitivo, las interacciones sociales deben dar lugar al conflicto sociocognitivo. Ante una situación problema por resolver, los participantes en una interacción deben, por una parte, presentar diferentes centraciones cognitivas (puntos de vista, métodos, respuestas,...) y, por otra parte, buscar una respuesta común al problema. La oposición social de puntos de vista caracteriza al conflicto sociocognitivo y es el pivote de la interacción.

El conflicto sociocognitivo integra dos conflictos:

- a) Por una parte, un conflicto inter-individual (y por lo tanto social) generado por la oposición de respuestas al problema planteado, y por otra parte,
- b) Un conflicto intra-individual, de naturaleza cognitiva, resultante de la toma de conciencia por el individuo de una respuesta contradictoria, que le incita a dudar de la suya.

La dimensión social del conflicto es fundamental. La expresión y la confrontación directa de los argumentos en la interacción social vuelven más tangible y más dinámico al conflicto cognitivo intra-individual. Adicionalmente, la superación del desequilibrio cognitivo intra-individual, probablemente se facilita

por la búsqueda de una respuesta común que resuelva el conflicto interindividual. En suma, el conflicto sociocognitivo favorece la actividad cognitiva.

### **Las condiciones del conflicto sociocognitivo**

Para que el conflicto sociocognitivo sea eficaz y dé lugar a progresos individuales, su funcionamiento debe cumplir otras condiciones además de la heterogeneidad inicial de respuestas y la coordinación final de los participantes. Las investigaciones han puesto en evidencia la importancia de dos grupos de restricciones, uno relacionado con las capacidades individuales de los protagonistas, y el otro con el desarrollo de la interacción.

En cuanto a las capacidades individuales, el conflicto sociocognitivo sólo puede ser fuente de progreso a partir del momento en el cual se dispone de capacidades mínimas, unas de orden cognitivo, necesarias para tomar conciencia de las diferentes respuestas y para establecer la naturaleza de la contradicción; y otras de orden sociocognitivo que le permitan insertarse en una interacción sociocognitiva.

El conflicto sociocognitivo no implica, como solución, la adopción mimética o complaciente de un punto de vista diferente. La interacción debe dar lugar a un compromiso activo de cada uno de los participantes en la confrontación de argumentos y su coordinación en una respuesta única. La negociación debe desarrollarse bajo la forma de intercambios que permita una co-elaboración real de la respuesta final. Ciertas modalidades relacionales pueden obstaculizar la expresión del conflicto sociocognitivo y su efectividad: trabas en la comunicación, acuerdos por complacencia o por sumi-



sión, etc. Estas formas de regulación del intercambio reducen la confrontación interindividual y resultan ineficaces. De ahí la importancia de organizar las interacciones de acuerdo a una relación de simetría entre los participantes, es decir, sobre la base de una igualdad de roles en los intercambios, una disposición que puede ser difícil de obtener cuando hay algún participante muy aventajado. En este último caso, se produce una colonización del universo mental del estudiante menos aventajado a manos del más aventajado.

En suma, si la heterogeneidad de respuestas de los participantes es una condición ineludible para la instalación de un conflicto sociocognitivo, ésta no garantiza su efectividad. En el marco experimental, algunas veces el adulto se ve obligado a intervenir para suscitar una dinámica de conflicto, hacer explícitas las oposiciones, impulsar los intercambios, etc. Es decir, la existencia de un conflicto no genera automáticamente la dinámica que conduce a su superación.

### **Los progresos cognitivos**

Cuando se satisfacen las condiciones de desarrollo de un conflicto sociocognitivo, las interacciones entre los alumnos permiten a cada uno de los participantes progresar más allá que los sujetos del mismo nivel inicial que actúan solos. Los efectos de la interacción se ponen de manifiesto en el progreso individual y no en la mejoría en la actuación colectiva, que podría buscarse en ciertas situaciones de trabajo en grupo. La solidez de los progresos se aprecia en función de tres criterios:

a) la generalización de la adquisición de nociones similares

- b) la estabilidad de la adquisición en el tiempo
- c) el perfeccionamiento de los argumentos y de las justificaciones (la producción de argumentos nuevos representa un progreso cognitivo auténtico).

### **5.2 Interacciones sociocognitivas simétricas**

La utilización del término “interacciones simétricas” corresponde esencialmente a las situaciones cognitivas en donde los roles y estatus de los participantes se conciben de manera equitativa. La igualdad de los roles, sin embargo, no implica necesariamente que los individuos pongan en acción funcionamientos cognitivos similares.

#### **La cooperación**

Esta interacción es parecida al conflicto sociocognitivo por la semejanza de objetivos entre los participantes, pero se diferencia por la ausencia de conflicto en la interacción. La situación de cooperación se manifiesta como un factor de progreso si equivale a una combinación real de esfuerzos y no una simple yuxtaposición de acciones individuales. Si una interacción colaborativa parece a priori más fácil de lograr que una interacción con conflicto, alcanzar una colaboración auténtica, es decir una coacción coordinada, concertada y no conflictiva, plantea a menudo serios problemas, tanto a niños como a adultos. La colaboración no se impone desde el exterior; es posible reducir las divergencias cognitivas o sociales, y hacer necesarias las estrategias colaborativas entre los participantes, en función de lo que está en juego y de la naturaleza de la tarea. En el marco escolar, la edad de los sujetos puede representar el obstáculo principal. Los estudios del desarrollo social del niño

indican, en efecto, que habría que esperar el principio de la adolescencia para observar una predominancia de conductas colaborativas sobre las conductas egocéntricas.

### **El aprendizaje en grupo**

De manera general, los resultados de las investigaciones favorecen la conclusión según la cual el trabajo colectivo es un factor de progreso cognitivo. Sin embargo, en ciertas situaciones de co-acción, los aportes de cada uno de los miembros del grupo son menores que las de los sujetos cuando trabajan solos. Esto ocurre cuando en situaciones de cooperación, la acción colectiva corresponde a la adición de las contribuciones aisladas de los participantes. Con cierta frecuencia aparecen condiciones de orden social que son difíciles de trasladar a los contextos escolarizados tradicionales. En el plano cognitivo, por ejemplo, son raras las nociones que pueden provocar una oposición de puntos de vista. Esto se debe, en parte, a los estrictos controles que se ejercen durante el desarrollo de las actividades consideradas como “educativas”. Enfatizamos que esto, más que una limitación del enfoque articulado alrededor de la presencia de un conflicto cognitivo, es resultado de la inercia del sistema educativo más tradicional, que no favorece la discrepancia (véanse por ejemplo los estudios realizados por Cobb y Yackel, PME Brasil, 19, sobre las normas “sociomatemáticas” del salón de clase).

En suma, si bien numerosos resultados revelan el interés del trabajo colectivo para mejorar las competencias cognitivas individuales, no hay que idealizar su papel y sus efectos en el contexto escolar cotidiano, por lo menos mientras estos contextos no sufran modificaciones de fondo. Sería ilusorio, en las actuales condiciones, considerar que el simple he-

cho de “poner a trabajar” juntos a los alumnos garantiza automáticamente un progreso, si no se modifican sustancialmente las relaciones y los acuerdos de trabajo en el salón de clases.

Los límites de la eficacia del trabajo en grupo no deben alejar al maestro del interés que ofrece el tratamiento social de los conocimientos y de las tareas escolares. La organización de situaciones tutoriales puede permitir a los alumnos poco aventajados, beneficiarse del trabajo con los alumnos más avanzados. Dado el interés de los maestros por el trabajo en grupo, es deseable tener mayor investigación sobre el tema, que retome los estudios psicológicos, para trazar los marcos de adecuación de las interacciones sociocognitivas en el aula. Estas investigaciones son tanto más necesarias cuanto que una orientación sociocognitiva de la enseñanza implica una evolución bastante radical del modo de aproximarse al alumno y de la concepción de la clase.

### **5.3 Las interacciones sociocognitivas asimétricas**

A diferencia de las anteriores, las interacciones asimétricas corresponden a circunstancias cognitivas en donde se pone el énfasis en la imitación o la tutela que reproduce una situación experto-novicio o maestro-aprendiz. Este tipo de situaciones están ancladas en el concepto vygotskyano de zona de desarrollo próximo.

#### **La interacción tutorial**

Este tipo de interacción se caracteriza por una asimetría del estatus y de los roles entre los participantes: un tutor (el experto) se encuentra en interacción sociocognitiva con un aprendiz (el novicio) para ayudarlo a realizar

una tarea o a adquirir una noción. Las diferencias en el saber y en el poder entre los participantes puede ser de una importancia variable. Así por ejemplo, en una interacción entre alumnos, los participantes pueden provenir de niveles escolares sucesivos o muy alejados.

Las situaciones tutoriales reúnen procesos de transmisión y de adquisición de saber y de saber-hacer. Si bien el objetivo prioritario de esta interacción es el “efecto novicio”, es decir el progreso del aprendiz, un beneficio secundario que se alcanza es el “efecto tutor”, es decir un mejoramiento de las capacidades cognitivas del tutor. Los progresos del tutor se explican por la movilización de procesos cognitivos subyacentes a actividades sociocognitivas (de interacción con el aprendiz) y metacognitivas (explicaciones, reformulaciones) requeridas por una situación tutorial.

#### **5.4 La teoría de las situaciones didácticas**

Con una clara influencia piagetiana, G. Brousseau (1986) desarrolló una teoría del aprendizaje matemático fuertemente anclada en los contenidos y la estructura lógica de la matemática, pero que recoge algunas de las características de los acercamientos interaccionistas mencionados arriba.

Para Brousseau, desde la concepción más general de la enseñanza, el saber es una asociación entre buenas preguntas y buenas respuestas. Sobre esta base, el énfasis del acercamiento radica en la identificación y el diseño de las “buenas preguntas” que generen los conflictos cognitivos y sociocognitivos detonadores del aprendizaje; estas “buenas preguntas” constituyen las *situaciones didácticas*.

La teoría de las situaciones didácticas pone al profesor en una interacción asimétrica con respecto a los estudiantes puesto que es él quien conoce los propósitos y efectos didácticos de la situación presentada. Sin embargo, en el desarrollo de la actividad cognitiva, los participantes desarrollan una interacción simétrica en la búsqueda de soluciones a la situación planteada.

La teoría se completa con un estudio minucioso de los distintos factores que determinan el sistema educativo en su conjunto: el obstáculo didáctico, la situación-problema, el contrato didáctico, las paradojas de la interacción didáctica, la situación adidáctica, etc.

#### **La situación problema**

La situación-problema constituye el punto de partida de las situaciones didácticas. Definida como una situación didáctica fundamental, pone en juego, como instrumento implícito, los conocimientos que el alumno debe aprender. La situación-problema es el detonador de la actividad cognitiva; para que esto suceda debe tener las siguientes características:

- a) Debe involucrar implícitamente los conceptos que se van a aprender.
- b) Debe representar un verdadero problema para el estudiante, pero a la vez, debe ser accesible a él.
- c) Debe permitir al alumno utilizar conocimientos anteriores
- d) Debe ofrecer una resistencia suficiente para llevar al alumno a poner en duda sus conocimientos y a proponer nuevas soluciones
- e) Debe contener su propia validación.

La resolución de la situación-problema supone una serie de interacciones simétricas entre estudiantes y de interacciones asimétricas entre los estudiantes y el profesor, pero también supone la superación de un conflicto cognitivo interno del sujeto entre sus conocimientos anteriores y los que resuelven la situación planteada.

## 6. Cognición y educación matemática

Es difícil analizar, por su profusión, todas las corrientes teóricas sobre el aprendizaje que han tomado cuerpo en la educación matemática; describiremos someramente algunas de las más significativas.

### 6.1 La Mediación Instrumental

La especie humana elabora herramientas con propósitos deliberados. Mediante la producción de herramientas hemos alterado nuestra estructura cognitiva y adquirido, por así decirlo, *nuevos órganos para la adaptación* al mundo exterior. Existen evidencias sólidas que muestran cómo, el desarrollo del cerebro en nuestra especie constituye una adquisición tardía, posterior al bipedalismo y en consonancia con el empleo de herramientas. A partir de la fabricación y empleo de herramientas, el tamaño del cerebro se triplicó (Brunner 1995, p. 46). Puede decirse que el cambio más importante ocurrido al hombre durante el último medio millón de años ha sido *aloplástico*, es decir, ha sido un cambio producido por sus relaciones con sistemas externos de ejecución, herramientas materiales primero, y posteriormente signos y sistemas de representación orales y de registro escrito.

En la actualidad, las teorías de la cognición de mayor impacto en los contextos educati-

vos, han reconocido la pertinencia del *principio de mediación instrumental* que podemos expresar de la siguiente manera: todo acto cognitivo está mediado por un instrumento que puede ser material o simbólico.

En este principio (Wertsch, 1993) convergen tanto la naturaleza mediada de la actividad cognitiva, como la inevitabilidad de los recursos representacionales para el desarrollo de la cognición. No hay actividad cognitiva al margen de la actividad representacional.

La fuerza de este principio puede ilustrarse de diversos modos. Por ejemplo, en términos filogenéticos (desarrollo de la especie) se puede describir ampliamente toda la historia de construcción de instrumentos y utensilios en las culturas que solemos llamar primitivas; puede ilustrarse fehacientemente la inseparabilidad de la actividad cognitiva y el desarrollo de una forma de *tecnología*.

En términos más cercanos a nosotros, el desarrollo de las ciencias naturales y de las matemáticas constituye un escenario rico en ilustraciones del principio. Pensemos, por ejemplo, en el desarrollo de la biología. ¿Sería concebible en este momento imaginar el estado actual de estas disciplinas sin los recursos tecnológicos que se han desarrollado simultáneamente con sus cuerpos conceptuales? El microscopio no solamente es un instrumento que “ayuda” al patólogo experimental, digamos, sino que le da acceso a un nivel de estructuración de la realidad imposible de alcanzar sin dicho instrumento. Entonces, su acción cognitiva (la del patólogo, en nuestro ejemplo) está mediada por el microscopio y el conocimiento producido está afectado de modo sustancial por el mencionado instrumento.

Conviene recalcar que el instrumento a que se refiere este principio puede ser un instrumento material o simbólico.



En el caso de las matemáticas, la mediación se ha dado esencialmente a través de los sistemas semióticos de representación. La historia de dichos sistemas va exhibiendo las transformaciones conceptuales a que han dado lugar en el desarrollo de las matemáticas (Duval, 1998). El proceso de articulación entre el concepto matemático (el “objeto” matemático) y sus representaciones es un proceso de mutua constitución. Podría decirse que la evolución de los sistemas semióticos de representación, en el caso de las matemáticas, han pasado por diversas etapas entre las cuales vale la pena señalar la siguiente: la separación entre las representaciones mentales y las representaciones semióticas. Hay entonces una predominancia de las representaciones semióticas en cuanto a las relaciones con el objeto. Por ejemplo, enfrentados al estudio de las rectas tangentes, los matemáticos del siglo XVII tuvieron que abandonar la idea de la recta tangente como ese objeto ideal que “sólo toca en un punto a la curva” ante los ejemplos de puntos de inflexión en los cuales la tangente atraviesa a la curva. Hubo que tomar una decisión entre el objeto mental (ideal) y lo que las representaciones algebraicas imponían como necesario. Otro momento significativo en el desarrollo de los sistemas de representación matemáticos, se da cuando se logra trabajar con las representaciones como si fueran el objeto. La manera de trabajar con los números reales mediante su sistema de representación decimal, es un ejemplo paradigmático de esta etapa.

Los sistemas de representación no cumplen tan solo una función de comunicación sino que también ofrecen un medio para el tratamiento de la información y son fuente de generación de significados.

## **6.2 La cognición situada**

En los años recientes, la investigación en educación matemática ha tenido como uno de sus intereses principales demostrar que el aprendizaje y la práctica de las matemáticas no son actividades individuales, aisladas de los contextos socioculturales en los que tienen lugar. Que la enseñanza y el aprendizaje siempre han tenido lugar dentro de contextos sociales que no sólo tienen una influencia sino que determinan la naturaleza del conocimiento construido. Los estudios que se han organizado alrededor de estas ideas sobre la contextualidad del conocimiento y su importancia para los estudios del acto cognitivo se han denominado, genéricamente, estudios sobre la cognición situada.

Las investigaciones realizadas desde la perspectiva situada sostienen que los factores sociales y lingüísticos son básicos para el estudio de los procesos de aprendizaje. En particular del aprendizaje de las matemáticas.

Añadiremos que tales investigaciones han permitido llevar los estudios sobre la cognición a un ámbito más rico que el tradicional —que ha visto la cognición como un fenómeno que sólo involucra los procesos internos del sujeto.

Hemos pasado pues de concebir la cognición como un fenómeno íntimo del sujeto a verla como un producto eminentemente sociocultural.

## **6.3 Nuevos sistemas de representación**

En la actualidad, los instrumentos computacionales (calculadoras algebraicas como la TI-92, las computadoras) encarnan sistemas de representación que presentan características nove-

dosas: son sistemas ejecutables de representación, que virtualmente ejecutan funciones cognitivas que anteriormente eran privativas de los seres humanos. Por ejemplo, graficar una función. Es un proceso que el estudiante ve desplegándose en la pantalla de su calculadora, sin su intervención directa. Desde luego esto no convierte al estudiante en un “desempleado” pues ahora, su trabajo consiste más en interpretar matemáticamente los fenómenos nuevos que aparecen en la pantalla.

Estos nuevos sistemas de representación (ejecutables) permiten al estudiante trabajar un problema desde diferentes enfoques cognitivos, por ejemplo, tomar un punto de vista concreto al analizar una función (digamos el comportamiento de una función continua sin derivada) o un punto de vista general: en lugar de analizar el comportamiento de un polinomio puede analizarse el comportamiento de una familia de polinomios.

Esto quizá nos esté indicando que un cambio central dentro de la educación consistirá en abandonar el objetivo tradicional de fluidez algorítmica y sustituirlo por el objetivo de fluidez representacional. Esto es, que el estudiante pueda representar un problema en diversos sistemas de representación y sea capaz de interpretar los resultados del tratamiento que se dé a tales sistemas mediante el instrumento ejecutor del que disponga.

Los nuevos sistemas de representación hacen posible también un campo de experiencia que no estaba antes a disposición del estudiante.

Pensemos por ejemplo en los sensores (CBL, CBR) que pueden articularse a las calculadoras. El estudiante puede representar gráficamente fenómenos naturales como las variaciones de temperatura, de intensidad sonora etc. Es decir, todo un mundo de variación y

cambio queda a su disposición como parte de su campo de experiencias. Estas nociones de variación y cambio no tienen que ser estudiadas de modo abstracto (en el sentido en que son extrañas a las experiencias del estudiante) sino que puede tejerse alrededor de ellas y con ellas, una red entre ideas y conceptos que dé como resultado una mayor familiaridad con este complejo conceptual.

Las matemáticas, como toda otra actividad intelectual, sufren la profunda influencia de las tecnologías existentes. Con el correr del tiempo, las tecnologías se tornan “invisibles” y las actividades que se generan a partir de ellas se conciben como actividades matemáticas independientes de aquella tecnología. Surge así, por ejemplo, la noción de una actividad matemática “pura”, al margen de su entorno sociocultural. En la escuela las destrezas con los cálculos logarítmicos se conciben como independientes de la herramienta y son “confundidos” con capacidades matemáticas puras. Como si el funcionamiento del sistema cognitivo fuera inmune a las herramientas *mediante* las cuales se despliega la actividad intelectual.

Los sistemas de representación clásicos (álgebra, cálculo, ecuaciones diferenciales, etc.) tienen una característica central: son sistemas de representación diseñados para poder actuar sobre ellos mediante reglas de transformación bien definidas. Un caso elemental lo constituye la aritmética. Allí están claras las reglas mediante las cuales realizamos operaciones sobre los números. Son sistemas de representación contruidos para operar con ellos.

En cambio, las representaciones ejecutables necesitan la mediación de un procesador sintáctico, como es un lenguaje de programación. Allí se transforma el trabajo cognitivo

del estudiante: la actividad de construcción de significados se torna central.

#### **6.4 El significado de las situaciones escolares**

Centradas en el funcionamiento interno del alumno o en el papel de las variables exteriores a la escuela, las investigaciones de psicología educativa han evitado, por mucho tiempo, la influencia de las variables intra- escolares.

Sin embargo, hoy día, bajo la influencia de la teoría de la *cognición situada*, se han realizado muchas investigaciones relativas a los significados que los alumnos dan a las situaciones escolares. Algunas investigaciones se han interesado en la influencia del prestigio social de la disciplina sobre los desempeños de los alumnos. Se pidió a los alumnos que reprodujeran una misma figura geométrica en un contexto de dibujo y en otro de geometría. Los resultados mostraron que los desempeños varían de acuerdo al soporte disciplinario. Mientras que en el contexto de un curso de dibujo alumnos buenos y malos obtienen resultados idénticos, en el marco mejor valorado de un curso de geometría, los buenos alumnos tienen mejores resultados. Los buenos alumnos prestan mayor atención a la tarea cuando se ubica en un contexto más elevado. El significado atribuido por los alumnos a la situación escolar interviene como regulador de su funcionamiento cognitivo.

La *cognición situada* defiende la idea según la cual las conductas cognitivas de un individuo no podrían comprenderse sin tomar en cuenta el entorno en el cual interviene. Los ejemplos anteriores pueden conducir a reconsiderar la interpretación de las dificultades que se encuentran en ciertos alumnos. Un alumno en dificultades no es necesaria-

mente un individuo cuyas capacidades son insuficientes; por el contrario, es quizás un alumno que no percibe el sentido del trabajo escolar o que atribuye a la escuela, a la tarea, o a las expectativas del profesor, otros significados diferentes a los valorados por la institución. El concepto de *claridad cognitiva*, por ejemplo, se ha propuesto en el dominio de la lectura para señalar qué tan importante para el logro del aprendizaje es que los alumnos comprendan la finalidad de las situaciones y de las tareas que les son propuestas. La disonancia entre las expectativas de la escuela y las del alumno puede ser una de las expresiones de la distancia cultural entre el alumno y la escuela, noción lanzada por los sociólogos para dar cuenta de las dificultades que tienen alumnos normales provenientes de medios sociales desfavorecidos. Si se sigue esta tesis, se debería dar la mayor atención a la clarificación de los contextos escolares y, particularmente, a la naturaleza de los acuerdos implícitos y explícitos entre maestro y alumnos.

#### **6.5 A modo de síntesis: el aprendizaje como un fenómeno individual y social**

A grandes rasgos, los enfoques sobre el aprendizaje se pueden ubicar entre los acercamientos cognitivos que parten del constructivismo piagetiano y los acercamientos socioculturales desarrollados a partir de la obra de Vygotsky. Si bien ambos aceptan, al menos implícitamente, la existencia de procesos intra-individuales y de influencias sociales, difieren considerablemente en la importancia que cada uno atribuye a estas dimensiones en el desarrollo de los conocimientos y del aprendizaje.

Los acercamientos socioconstructivistas atribuyen a las intervenciones sociales un papel

preponderante en el desarrollo cognitivo del niño y cuestionan las explicaciones intra-individuales del desarrollo. Un nivel de análisis estrictamente intra-individual se muestra insuficiente para dar cuenta de adquisiciones y de desempeños cognitivos. Ciertamente, todo aprendiz es un sujeto confrontado individualmente a un cierto número de tareas pero, la mayoría de ellas comprende conocimientos que son fruto de una intervención social. Centrados en el análisis del funcionamiento cognitivo en un contexto social, los acercamientos sociocognitivos pueden parecer más apropiados para la comprensión de los fenómenos educativos.

Por otro lado, el aprendizaje es también una relación entre un sujeto y un objeto o una tarea. De ahí que para comprender el aprendizaje, hace falta también estudiar los mecanismos que el individuo pone en marcha y con ello, ocuparse de los componentes y restricciones del sistema cognitivo. En este nivel interviene la psicología cognitiva para situar las bases del aprendizaje en el tratamiento cognitivo de la información, los procedimientos, las estrategias y los conocimientos del individuo.

En definitiva, el campo de la psicología del aprendizaje está dividido en acercamientos complementarios, no incompatibles. El aprendizaje puede entenderse, al mismo tiempo, como un fenómeno individual y social. El desafío para la psicología es explicar la articulación de los procesos de adquisición individuales y socioculturales. En el plano de la educación, es razonable pensar que la combinación de situaciones individuales y de interacción social puede ofrecer las condiciones de aprendizaje más favorables si toma en cuenta tanto los estilos cognitivos de los estudiantes como la naturaleza de las relaciones que se establezcan entre ellos.

## 7. Matemáticas y cognición: una visión clásica e informática

La enseñanza tradicional induce en los estudiantes la idea de que las matemáticas están referidas a un conjunto de expresiones simbólicas desprovistas de conexión con cualquier fragmento de su conocimiento. La consecuencia natural de esta idea es que el conocimiento matemático se reduce a un conjunto de destrezas para manipular símbolos que, a su vez, permiten la transformación de una expresión simbólica en otra. Y eso es todo. Desde luego, esta es una concepción muy pobre de las matemáticas, que hay que modificar a través de los procesos educativos. Nos proponemos mostrar cómo un entorno computacional puede servir como principio orientador para lograr las modificaciones deseadas en relación a las concepciones matemáticas de los estudiantes.

### 7.1 Generalización y Contextualidad

Los procesos psicológicos básicos característicos de las matemáticas (por ejemplo, la abstracción, la generalización y la inferencia) son universales, comunes a toda la humanidad. Pero, su organización funcional puede variar sustancialmente dependiendo del entorno sociocultural, de las herramientas que suministra este entorno como mediadores de la acción cognitiva. No olvidemos que la acción cognitiva necesita del soporte instrumental.

La enseñanza de las matemáticas nos plantea un problema delicado: ¿cómo tratar con la naturaleza descontextualizada de las proposiciones matemáticas que forman parte de una cultura matemática universal y, al mismo tiempo, con la necesidad de admitir que el conocimiento que un estudiante construye,



produce, asimila, se da siempre mediado por un contexto?

La tradición científica ha mostrado que al avanzar en la organización de una ciencia, las proposiciones del cuerpo teórico que se va produciendo tienen como rasgo característico el de ser enunciados generales, descontextualizados. Basta recordar algunos ejemplos: la ley universal de la gravitación, en la física; el teorema de Pitágoras; la fórmula general para resolver cualquier ecuación de segundo grado; etc. Esto se vincula de modo íntimo (Duvall, 1998) con la evolución de los sistemas semióticos de representación que se estén empleando.

En la introducción de sus *Fundamentos de la Geometría* (1899) Hilbert fue muy claro al decir que el significado de los puntos, de las líneas y de los planos es algo que está determinado por las *relaciones* que podemos establecer entre ellos. De esta manera, los postulados de la geometría pueden interpretarse como *definiciones implícitas* de los objetos geométricos. Este punto de vista ha tenido, y sigue teniendo, un éxito enorme en el desarrollo de las matemáticas.

Desde el punto de vista educativo, las dificultades surgen cuando identificamos ese propósito de la matemática, con un principio didáctico. Es decir, cuando confundimos la matemática del matemático con las matemáticas escolares.

La demanda cognitiva que estaríamos haciendo a un estudiante, si de entrada lo enfrentamos al aprendizaje de la geometría, introduciendo la materia con un nivel de formalización elevado, es enorme. Estaríamos suponiendo (aunque de esto no fuésemos conscientes) que la cognición del estudiante se adapta de modo natural, al camino ya organizado de una disciplina. Esto ha sido

una tentación permanente pues, de ser factible, representaría un ahorro considerable de esfuerzo: los problemas curriculares, por ejemplo, estarían resueltos a través de la formalización de la matemática.

Pensemos en las circunstancias del aprendizaje en un salón de clases. Para los estudiantes es un obstáculo poder pasar de los dibujos de triángulos particulares a *el triángulo* como objeto geométrico al cual se refieren los teoremas de la geometría. Si la enseñanza de las matemáticas pretende partir de los enunciados generales, entonces ¿cómo *inyectar* significado en estos enunciados generales, para beneficio de los estudiantes?

La experiencia ha mostrado que el camino de lo general a lo particular está plagado de dificultades. Pero tampoco es posible acceder a los enunciados generales, a los conceptos de una ciencia siguiendo un camino estrictamente inductivo. La construcción del conocimiento participa de ambos enfoques. A veces, se favorece un enfoque inductivo, heurístico, sobre todo cuando se inicia la exploración de un campo de investigación. Históricamente, el trabajo de Euler ha sido puesto como un ejemplo del papel que puede jugar un enfoque heurístico en el desarrollo del conocimiento matemático. Más recientemente, Lakatos (1976) en su célebre libro, *Conjectures and Refutations* (Conjeturas y Refutaciones), ha profundizado sobre la importancia esencial que juega este enfoque. En la didáctica de las matemáticas, estas consideraciones han dado lugar a un amplio campo de investigaciones sobre la resolución de problemas (Santos, L.M., 1997). Desde luego, la sistematización del conocimiento, en última instancia, queda puesta de manifiesto en las re-elaboraciones formales del campo. La didáctica tiene que respetar la epistemología de las matemáticas, es decir, tiene que to-

mar en cuenta los mecanismos de producción del conocimiento que siempre van a oscilar entre lo heurístico y lo formal, lo riguroso.

En resumen: porque la cognición tiene una naturaleza situada, la didáctica no puede elegir el camino de lo general a lo particular, en sentido estricto, como estrategia didáctica, y porque la ciencia no es resultado de un estricto proceso inductivo, tampoco puede adoptarse el camino de lo particular a lo general como estrategia didáctica. Entonces, ¿qué camino elegir? La construcción de una respuesta a este interrogante pasa por un análisis de lo particular y lo general, de lo concreto y lo abstracto. Iniciaremos la construcción de la respuesta en la siguiente sección.

## 7.2 Reflexión sobre la abstracción

La breve referencia al ideal formalista de Hilbert puede reformularse así: el significado de los enunciados y de los conceptos del cuerpo teórico, surge de las relaciones entre ellos y no ya de las relaciones entre un concepto, digamos, y la realidad que refleja. Sólo importa la lógica interna del sistema al margen de los significados “intuitivos” que podamos asociar a los términos.

La manera usual como entendemos la naturaleza abstracta de la matemática proviene de este enfoque. La didáctica tiene que hacer posible que los estudiantes puedan acceder a estos niveles de complejidad sin descuidar la naturaleza situada del conocimiento. La clave parece estar en imaginar una forma de abstracción que esté más cerca de lo que ocurre realmente en términos cognitivos y que no contradiga, sino que complemente, la noción clásica de abstracción. La noción clásica incorpora la idea de extracción pero también la idea de

re-organización a un nivel superior de aquello que ya se había aprendido.

Los significados extra-matemáticos de una situación se derivan de un escenario que incluye la experiencia previa de quien aprende. Entonces, los recursos que el medio pone a disposición de un estudiante estimulan la construcción de significados. El medio funciona como un soporte para el establecimiento de conexiones entre fragmentos de conocimiento. Desde esta perspectiva, se trata entonces de conectar el conocimiento informal del estudiante con sus fragmentos de conocimiento matemático. En un sentido que puede hacerse más preciso, el medio funciona como una especie de dominio de abstracción.

El trabajo de Carraher et al (1991), sobre las estrategias aritméticas de los oficios, muestra cómo lo general puede existir dentro de lo particular. Cómo las prácticas de las matemáticas de los oficios pueden servir para expresar relaciones matemáticas más generales. Esas relaciones matemáticas más generales que todavía dependen del medio de expresión empleado, son ejemplos de abstracciones situadas (Noss y Hoyles, 1996).

Utilizando los recursos estructurantes del medio, se abre la posibilidad de que puedan establecerse conexiones entre distintos fragmentos de conocimiento y así producir versiones más generales, objetos abstractos en el sentido clásico del término. Objetos que son síntesis de múltiples determinaciones. Para un topólogo, un espacio de Hausdorff, que evidentemente es abstracto, puede ser al mismo tiempo, tan concreto como una guayaba.

Lo abstracto y lo concreto no son, en consecuencia, propiedades del objeto de conoci-

miento sino de la relación que uno logra establecer con el objeto de conocimiento.

### 7.3 *Los recursos computacionales en la educación*

Cuando se usa la tecnología en la escuela, hay que reconocer que no es esa tecnología en sí misma el objeto central de nuestro interés sino el pensamiento matemático que pueden desarrollar los estudiantes bajo la mediación de dicha tecnología.

La importancia de las herramientas computacionales para la educación matemática está asociada a su capacidad para ofrecernos medios alternativos de expresión matemática. A su capacidad para ofrecer formas innovadoras de manipulación de los objetos matemáticos.

Tomemos como ejemplo el universo virtual de la geometría dinámica (*Cabri*). Allí podemos transformar un triángulo en otro, mediante el desplazamiento (*dragging*) de la figura geométrica. Este acto, que puede parecer trivial, conlleva una gran potencialidad. Nos permite desplazarnos dentro de una familia de triángulos (virtuales) a la que pertenece el triángulo original, cerrando con ello la brecha entre un dibujo (representación estática de un triángulo) y el objeto geométrico *triángulo* compuesto por la familia de triángulos a los que se puede llegar mediante las deformaciones que permite el *Cabri*. Desde este punto de vista conviene pensar en un teorema como *una propiedad que no puede destruirse* mediante los desplazamientos del entorno. Esta manera de concebir un teorema tiene una ventaja: favorece su conceptualización como la expresión de una propiedad invariante bajo deformaciones dentro del entorno. Se abre un camino para las formas de argumentación, dentro del uni-

verso virtual del *Cabri*, y ello permite distinguir estas formas de argumentación de aquellas a las que estamos más o menos acostumbrados dentro de los entornos de papel y lápiz.

En el fondo, el problema educativo reside en cómo se construye el significado matemático. Los medios computacionales estimulan la dialéctica entre el proceso de dar sentido a las prácticas cotidianas mediante la organización y la matematización, por una parte y la comprensión de situaciones matemáticas mediante el recurso de darles sentido importándolas de una práctica extra-matemática. Podríamos decir que parte importante de la esencia del pensamiento matemático consiste en establecer conexiones entre distintos fragmentos de conocimiento.

Un medio computacional permite generar una especie de realidad (virtual) matemática. Trabajar en un medio computacional permite comprender cómo los recursos de ese medio estructuran la *exploración* y cómo los recursos expresivos del medio favorecen la *sistematización* (Noss y Hoyles, *op. cit.*).

Un medio computacional es un dominio de abstracción: allí el estudiante puede expresar la generalidad matemática pero en dependencia del medio aunque sus expresiones apuntan más allá, hacia las descripciones abstractas de las estructuras matemáticas. Se hace posible explorar ideas dentro de ámbitos particulares, concretos y manipulables pero que contienen la semilla de lo general, lo abstracto y lo virtual.

Los medios computacionales funcionan como *recursos estructurantes* de la exploración matemática de los estudiantes. Pueden generar ideas que se expresan a través del medio, que están íntimamente vinculadas al medio y articuladas a él. Es en ese



sentido que el medio constituye un dominio de abstracción. Dentro de un dominio de abstracción es posible desencadenar una exploración sistemática y construir argumentos a favor de una proposición que si bien no constituyen una demostración formal, sí constituyen, en el interior del dominio de abstracción correspondiente, una argumentación para resultados *locales*, es decir, expresados en el lenguaje del medio y cuyo sentido proviene de él, aunque puedan tener un nivel de generalidad mayor. Estas argumentaciones las llamaremos *demostraciones situadas*. En cierta manera son argumentaciones que respetan la *ecología* del entorno que les da soporte expresivo.

Los estudiantes son capaces de articular los resultados de sus exploraciones de manera tal que éstos puedan ser llevados más allá del medio computacional o puedan dar lugar a nuevas versiones de un resultado que hacen clara la visibilidad del medio computacional.

Daremos ahora un ejemplo de ello: el caso de las funciones continuas sin derivadas. La serie de potencias,

$$F(x) = \sum \left( \frac{2}{3} \right)^n \cos(9^n x)$$

define una función continua sin derivadas. Este es un resultado clásico de Weierstrass. Graficando los polinomios correspondientes (haciendo variar  $n$  entre 0 y 5, después entre 0 y 7 etc.) el estudiante empieza a descubrir el grado de complejidad de la función, aunque sea sólo desde un punto de vista visual al apreciar cómo se va graficando sobre la pantalla de su instrumento computacional. Haciendo uso del zoom que viene incorporado,

por ejemplo a la calculadora TI-92, puede descubrirse más sobre la complejidad de la función y la imposibilidad de un plano de representación (la pantalla) cuya resolución es finita, para exhibir la gráfica *como es en realidad*. De nuevo, aquí surge la posibilidad de enunciar una *versión virtual* del teorema. Es decir, un enunciado situado, que tome en consideración la naturaleza del medio expresivo que estamos empleando. Los recursos estructurantes que suministra el medio contribuyen al proceso de construcción de significado para este resultado fundamental de la teoría del cálculo.

Es innecesario decir que para obtener los mayores beneficios de estos ejemplos, es fundamental tener a mano una calculadora como la TI-92 con el propósito de ir comprobando las afirmaciones hechas sobre la fenomenología del entorno informático dentro del cual se trabaja.

### A modo de conclusión

Para terminar, nos parece pertinente intentar una síntesis de las ideas centrales y de sus intenciones, que hemos discutido en el cuerpo principal del texto precedente. Todo el trabajo desarrollado en el campo de la educación matemática, durante las últimas décadas, ha conducido a la consolidación de una disciplina en la cual pueden distinguirse con nitidez un cuerpo teórico y una práctica orientada por los resultados de la investigación. Esta práctica es lo que muchos investigadores denominan una *ingeniería*.

El cuerpo teórico de este campo de investigación, inició su articulación observando al fenómeno educativo desde la perspectiva de la cognición. La didáctica ha ido poniendo a prueba las diversas teorías de la cognición, con el propósito, desde luego, de generar ex-

plicaciones a los resultados que produce el trabajo de campo. Esto se ha hecho partiendo desde las teorías más simples del conductismo, pasando luego por la psicología genética de Piaget y su escuela de Ginebra, hasta las teorías socioculturales que ya no ven la cognición como “algo que ocurre en el cráneo” de las personas y que, de allí, se proyecta hacia su entorno social sino, más bien, como algo *distribuido* socialmente. Esto último puede ilustrarse mediante la observación: uno aprende más de un tema cuando lo estudia en medio de una comunidad de expertos en ese tema.

La presencia de los instrumentos de computación, computadoras (ordenadores) y calculadoras de todo tipo, en los sistemas educativos, ha traído al primer plano, para la investigación en didáctica de las matemáticas, la noción de mediación instrumental. El estudiante establece una sociedad cognitiva con la máquina, como antes la ha establecido con la escritura y con el sistema decimal. Esta es una idea de la mayor importancia.

De esta mirada sobre el fenómeno educativo, esperamos extraer, mediante la investigación, suficiente información que permita la transformación de los sistemas educativos de cara a los nuevos tiempos que ya están entre nosotros.

## Referencias

- Brousseau, G.** (1986): *La théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques*. Tesis, Universidad de Bordeaux I.
- Bruner, J.** (1983) *Child's talk: Learning to use language*. Oxford: Oxford University Press
- Bruner, J.** (1995). *Desarrollo Cognitivo y Educación*. Madrid: Ediciones Morata.
- Carraher, T. Carraher, D.& Schliemann, A.** (1991). *En la vida diez, en la escuela cero*. México: Siglo XXI.
- Cole, M.** (1999). *Psicología Cultural*. México: Alianza Universidad.
- Duval, R.** (1998). *Signe et Object (I)* en *Annales de Didactique et Science Cognitives*, 6, pp. 139-163, Estrasburgo: IREM.
- Lakatos, I.** (1976). *Proofs and Refutations*. Cambridge Univ. Press.
- Noss, R. y Hoyles, C.** (1996). *Windows on Mathematical Meanings*. Holanda: Kluwer.
- Perret-Clermont, A.N.** (1996): *La construction de l'intelligence dans l'interaction sociale*, (1ª edición, 1979) Berna: P. Lang
- Piaget, J.** (1983). *El lenguaje y el pensamiento en el niño. Estudio sobre la lógica del niño (I)* (1a. edición 1923). B. Aires: Editorial Guadalupe.
- Santos, L.M.** (1997): *Principios y Métodos de la Resolución de Problemas en el aprendizaje de las Matemáticas*. Grupo Editorial Iberoamérica, México.
- Schneuwly, B.** (1995) *De l'importance de l'enseignement pour le développement: Vygotsky et l'école en Psychologie et Éducation*, nº 21.
- Vygotsky, L.** (1986). *Pensamiento y Lenguaje*. Edición a cargo de A. Kozulin. México: Paidós.
- Wertsch, J.** (1993). *Voces de la mente*. Madrid: Visor Distribuciones
- Yackel, E. y Cobb, P.** (1995): *Classroom sociomathematical norms and intellectual autonomy*. En Meira, L.&Carraher, D. editores, PME-19, Brasil, Recife, pp. 264-271.

# Evolución y tecnología

**Luis Moreno Armella**

CINVESTAV - IPN, México

## 1. Introducción

El ser humano ha construido un mundo artificial para vivir. Desde el martillo más simple hasta la computadora más compleja, son ejemplos de instrumentos con los que ha poblado al mundo y que le han permitido realizar la tarea que se ha propuesto: diseñar un mundo a la medida de sus necesidades y aspiraciones. En esto ha consistido su *adaptación* al mundo natural, desde los mismos inicios del proceso evolutivo de la especie *Homo*.

Construir herramientas con propósitos deliberados constituye pues, un rasgo distintivo de nuestra especie a tal grado que la historia de su evolución puede identificarse con la del desarrollo de sus órganos artificiales: las herramientas.

La toma de conciencia sobre la importancia de la relación entre el cerebro y las herramientas mediadoras de la actividad humana, nos compromete a analizar esta situación desde una perspectiva más amplia. Tan amplia que abarca desde los orígenes de nuestra especie hasta el mundo de la comunicación por Internet.

Al *Homo erectus*<sup>6</sup> (que vivió en el periodo que va desde hace un millón y medio de años hasta hace 300 mil años aproximadamente) se le reconoce como la primera especie genuinamente humana. Su cerebro alcanzó un tamaño de aproximadamente 80% de un cerebro actual. Esto fue suficiente para que el *erectus* desarrollara capacidades intelectuales considerables. Por ejemplo, *memoria voluntaria* (Donald, 1992). La memoria voluntaria permite la reproducción de un gesto o de una secuencia de gestos articulados que conducen a la fabricación de una herramienta (un hacha, por ejemplo). Durante la reproducción del proceso pueden ocurrir dos cosas: una, que quien realice la reproducción del proceso lo haga para revisarlo y eventualmente mejorarlo. Dos, que quien realice la reproducción lo haga para *enseñar* a otros el proceso de construcción de una herramienta. En ambos casos, la intención comunicativa es clara. Podemos concluir entonces que estar en posesión de una memoria voluntaria genera un nivel de comunicación comunitario. El registro fósil nos enseña el alto grado de uniformidad en las herramientas de esta etapa en la evolución, con lo cual cobra fuerza la tesis sobre la existencia

---

<sup>6</sup> Por razones de espacio no podremos hacer una presentación exhaustiva de cada uno de los argumentos que apoyan nuestras afirmaciones. Referimos al lector interesado en profundizar temas específicos, a la bibliografía.

de un modo de comunicación, seguramente gestual, en ausencia todavía, de un lenguaje articulado.

La investigación ha revelado que las partes del cerebro que más han evolucionado son las que están en relación con funciones cognitivas. Por ejemplo, el hipocampo, relacionado con la memoria y la espacialidad; el cerebelo, relacionado con la coordinación y finura de los movimientos (Rubia, 2000). La coordinación refinada entre el ojo y la mano, sin duda fue central para la cultura de los homínidos. Dicha coordinación jugó un papel muy importante en la construcción de herramientas.

De lo anterior puede inferirse que *las herramientas no resultaron ser meros apéndices para aumentar una capacidad física deficiente*. En realidad, la cantidad de manipulaciones que una y otra vez tuvo que realizar el Homo Erectus cuando construía una herramienta, se fueron sistematizando y fueron modificando sus patrones mentales.

## 2. Transición cognitiva

Los registros fósiles disponibles, muestran que hace aproximadamente 400 mil años se produjo un crecimiento encefálico mayor, dando lugar a un nuevo miembro de la especie Homo. Las ventajas adaptativas que poseía el nuevo miembro de la especie debían ser muy superiores a las del Erectus, pues éste último desapareció de los registros fósiles desde hace 300 mil años.

El periodo de transición comprendido entre 300 mil y 50 mil años, sirvió para que el Sapiens Arcaico se asentara en el planeta.

El periodo siguiente, es decir *los últimos 50 mil años*, resulta particularmente interesante

para analizar las relaciones entre evolución, tecnología y desarrollo del lenguaje.

El *sapiens-sapiens* llegó a Europa, proveniente de África, hace unos 40 mil años (Stringer&McKie, 1997). Del periodo comprendido entre su llegada y hasta hace unos 10 mil años se tienen en el registro fósil, herramientas que sugieren que la especie había accedido a una etapa cognitiva y comunicativa más avanzada. En cierto momento, la producción de herramientas pudo ir más allá del nivel utilitario asociado a ellas (por ejemplo, de hace unos 27 mil años se tienen esculturas realizadas sobre hueso).

El lenguaje oral es característico del *Homo sapiens-sapiens*, especie a la cual pertenecemos los humanos modernos. Poseemos habla y otras destrezas semióticas que pueden definirse como la capacidad para inventar y usar signos para comunicar el pensamiento.

Debe decirse que no está totalmente esclarecido cómo el habla y otros recursos semióticos aparecieron en escena. Pero su uso intenso durante los últimos 40 mil años es incontestable. El habla añade la posibilidad de compartir información especializada y comunicarla a alta velocidad. Con el habla, añadida a la comunicación gestual, muchos aspectos de esta cultura pueden ser reelaborados, desde las organizaciones sociales hasta las manufacturas. *El habla toma el lugar central dentro de los instrumentos de mediación.*

¿Cuál es el camino que otorga centralidad al habla como organizador social? El empleo más elaborado del habla en las sociedades tribales se encuentra en *la invención de modelos conceptuales del universo humano*. Todas las sociedades primitivas tienen mitos que se refieren a la creación del mundo y que sirven para encapsular ideas compartidas.

El lenguaje es, sobretodo, un dispositivo social. Su función está vinculada, desde sus comienzos, al desarrollo del *pensamiento integrador*. Es un recurso de modelación de la realidad y de las experiencias vividas por una colectividad.

Es probable que las primeras manifestaciones del lenguaje oral se hayan presentado bajo la forma de *sistemas de sonidos articulados* y sólo después se hayan tornado lenguas habladas. Sea como haya sido, vale la pena resaltar una característica privativa de los lenguajes humanos: *la referencia simbólica*. Las especies que poseen sistemas de códigos de señales que sirven para alertar sobre la presencia cercana de un depredador, por ejemplo, sólo usan estos sistemas en presencia del depredador. Jamás en ausencia de él. Esto significa que la referencia se hace siempre a un sujeto presente. En cambio, en los lenguajes humanos, puede uno referirse a algo presente pero también a algo ausente, abriéndose así, la posibilidad de duplicar, simbólicamente, el mundo.

### 3. Cultura y Oralidad

La fase de la *oralidad* abrió la puerta a la consolidación y profundización de la vida colectiva. Es fácil imaginar el redimensionamiento de los procesos sociales de producción, aprendizaje y enseñanza, en una colectividad que posee ya un instrumento de comunicación como es la lengua hablada.

El trabajo con los instrumentos de piedra en esta etapa, va haciéndose cada vez más sofisticado y se prolonga hasta el llamado *periodo neolítico*. Por fortuna, no es el trabajo con la piedra lo único que puede mostrarse de este periodo. Por ejemplo, las estructuras de ladrillos y las embarcaciones para la nave-

gación acuática, son una muestra de desarrollos realizados a partir de habilidades más finas desarrolladas en un entorno de mayor comunicación, gracias al lenguaje oral.

Quizá los dos logros principales de la fase de la oralidad sean *la agricultura* y el desarrollo de la *vida urbana*. Desde sus comienzos, la urbanización permitió una alta concentración de recursos tecnológicos. La competencia económica entre ciudades, produjo un desarrollo explosivo en el comercio. Unas ciudades proveían alimentos y hospedaje a los viajeros quienes intercambiaban estos servicios por herramientas, que solían traer de sus destinos anteriores. Se fue generando un comercio cada vez más desarrollado que *puso en red* a ciudades alejadas entre si más de 20 mil kilómetros (Bloom, 2000). Es inevitable suponer que tales intercambios no fueron culturalmente neutros. Se hizo presente un fuego cruzado de ideas, métodos y estilos que enriquecieron las tecnologías propias de cada ciudad. Las diferencias y conformidades en los modos de hacer, presentes en las redes de intercambio, abrieron paso a una modernidad, hace 6 mil años, que puede verse como una célula de formas futuras de interactividad.

Las funciones del lenguaje están vinculadas al desarrollo de un pensamiento integrador, es decir, a una síntesis de información que se halla dispersa en determinado momento y lugar. Queremos insistir en que, sin duda, una de las principales razones de la importancia de la oralidad es haber suministrado un medio para la elaboración de modelos simbólicos del universo humano.

### 4. Sistemas artificiales de memoria

Las organizaciones sociales, al alcanzar niveles de complejidad cada vez más elevados,



dependen de la producción de *registros externos*, es decir, de *sistemas artificiales de memoria*. Esto se debe, sin duda, al aumento de los conocimientos, a la necesidad de compartirlos y a las exigencias correspondientes que todo ello impone sobre la memoria biológica. Este razonamiento es aplicable a los conglomerados sociales existentes durante los últimos 30 mil años. En efecto, es muy larga la lista de creaciones tecnológicas que precedieron a la escritura. Por ejemplo, la cerámica aparece en lo que hoy es territorio checo, hace unos 27 mil años; el boomerang apareció hace unos 17 mil años, junto con la aguja de coser, con el arco y la flecha y los primeros usos de la cuerda. En Mesopotamia, hace 12 mil años, se dio la domesticación del perro y casi al mismo tiempo la domesticación del carnero y la oveja en Persia. Podríamos continuar alargando esta lista. En lugar de ello, observemos que se estaban dando cada vez más, las condiciones para el surgimiento de *los recursos de memoria externa* necesarios para registrar todo el conocimiento producido.

El ser humano alcanzó un alto grado de especialización cognitiva no sólo mediante el empleo de recursos tecnológicos materiales, sino también, mediante los recursos semióticos, que hacen parte de una *tecnología simbólica*. Así, por ejemplo, un pescador interpreta ciertos movimientos en el agua, como una señal de la presencia de peces; una nube de polvo se concibe como indicación de la aproximación de ciertos animales. Estos ejemplos no se refieren a una habilidad sensorial sino a *la organización funcional de la percepción a partir de la utilización de sistemas de signos* (los movimientos en el agua, la nube de polvo...).

Los recursos gráficos, desarrollados todavía en medio de un fuerte entorno oral, tuvieron

un desenvolvimiento lento. No había entonces una función específica para las representaciones gráficas. Los pinturas, realmente sofisticadas, datan de hace unos 15 mil años. Por ejemplo, las halladas en las cuevas de Altamira, en España, y Lascaux en Francia. Con estos medios, la expresión simbólica ya no se limita a una transmisión oral, sino que ahora, se deja una pintura que otro puede ver e interpretar aún *en ausencia del autor*. Se elabora con ello un soporte de la memoria y un medio de expresión que rebasan los límites impuestos por la biología. Comienza entonces lo que se conoce como la transformación *tecnológica* de la memoria.

Pero aún estos recursos de memoria artificiales tienen antecedentes notables. Se han hallado huesos (tibias de lobo), por ejemplo en Moravia, con series de 25 y hasta 30 incisiones. Es clara, en estos ejemplos, la intencionalidad del autor: usar las marcas como una forma de registro externo, posiblemente de las piezas cazadas. Desde el punto de vista de la aritmética, la fase de desarrollo correspondiente podemos denominarla como *pre-operatoria*. Hay una asignación de símbolos a los objetos pero aún se carece de una estructura, de una organización de la cantidad.

Este método de poner en correspondencia uno-a-uno, también se utilizó para socializar los intercambios comerciales. Se tienen evidencias del uso de varas, sobre las que se trazaban marcas simultáneamente en dos de ellas, con el fin de registrar digamos una deuda por la adquisición de una mercancía. Cada uno de los participantes en la transacción conservaba una de las varas con la información correspondiente al intercambio (Guedj, 1996). Esta socialización del empleo de la cantidad, se dio hace aproximadamente 15 mil años. Habría que esperar todavía unos 5 mil años para presenciar la aparición

de otros métodos de conteo. En las comunidades sedentarias, todavía ágrafas, de hace 10 mil años, se usaron piedras de diferentes tamaños y formas para representar las cantidades. Aquí apreciamos ya un progreso considerable en la simbolización: un símbolo, es decir, una piedra de cierta forma ya no representa una unidad. Ahora, su forma indica su valor numérico. Desde luego lo central aquí es que el valor está dado *mediante una convención*. Esto nos remite a las anteriores consideraciones que hemos hecho sobre la *referencia simbólica*, propia de los lenguajes humanos. Más adelante, hablaremos de la matemática babilónica, en donde ya aparece un *sistema* numérico.

Puede decirse que la aparición de los *soportes de representación externa* permitió sustituir ciertas funciones naturales de la memoria por el empleo de un sistema artificial de conservación de la información. Los primeros sistemas de escritura eran *sistemas de registros de datos*: formas externas para conservar lo que anteriormente había que lograr mediante el recurso biológico de la memoria natural. Ese paso es fundamental: transforma la memoria biológica en una memoria tecnológica, como ya hemos mencionado.

Un ejemplo importante de lo anterior, se refleja en la construcción de los primeros calendarios. Es claro que esta construcción implicaba una *actitud teórica* con respecto a los eventos astronómicos. Todas las sociedades agrícolas tempranas, debido a sus necesidades, tenían calendarios basados en sus observaciones. De modo que las bases de la *observación sistemática* y la *predicción*, ya existían hace aproximadamente diez mil años. La construcción de estos registros astronómicos permitió mejorar sustancialmente los modelos mentales espacio-tempora-

les, y simultáneamente, permitió el desarrollo de las sociedades agrícolas. A continuación presentaremos un ejemplo de la mayor importancia.

## 5. Desarrollo de la escritura

### 5.1 *La escritura sumeria: una reflexión sobre el número*

La primera escritura conocida data del periodo comprendido entre los años 3500 y 2800 a.C., es la llamada escritura *cuneiforme* y se originó en Uruk, epicentro del mundo sumerio, al sur de lo que hoy es Irak. Es probable que la innovación desarrollada por los sumerios haya pasado a Egipto y al valle del Indo mediante las redes comerciales que existían en aquella época.

La escritura cuneiforme fue un sistema muy exitoso cuyo empleo se desplegó a lo largo de tres milenios. Los soportes externos de la escritura cuneiforme son tablillas de barro. Las más antiguas datan de hace 5 mil años. En las tablillas hay tres tipos de inscripciones: sellos personales de identidad, dibujos que corresponden a mercancías comercializadas y números que corresponden a las cantidades de las mercancías. ¿Cómo se llegó hasta aquí?

El sistema de escritura pasó por un prolongado proceso evolutivo: los símbolos sumerios más antiguos pertenecen a un sistema de conteo desarrollado aproximadamente hace 8500 a.C. Retrocedamos a esta época remota.

Las sociedades neolíticas eran altamente jerarquizadas. Para administrar los comestibles, por ejemplo, existían élites locales. Los jefes reunían y posteriormente re-distribuían los bienes económicos de la sociedad. Me-



diante ciertas piezas (fichas) realizaban los cálculos aritméticos correspondientes a su economía re-distributiva. Podría decirse que la función de estas primeras fichas era esencialmente establecer una correspondencia 1-1 con las mercancías recibidas y posteriormente redistribuidas. Fue un sistema que funcionó durante cuatro milenios. Luego, como resultado del aumento de complejidad de las sociedades, durante el cuarto milenio a.C. se produjo una expansión considerable del sistema de fichas. Esto se correspondió con la modificación del sistema re-distributivo que entonces introdujo los impuestos. Al comienzo de esta nueva fase, las fichas se perforaban y se formaban especies de collares de piedras. Posteriormente, entre los años 3700 y 3500 a.C. se modificó el procedimiento de reunir las fichas en colecciones. Ahora, las fichas que representaban diversas cantidades de mercancías varias, se introducían en unas bolas huecas de arcilla que posteriormente se sellaban.

La forma de cada ficha correspondía a un número. Pues bien, como una especie de medida de seguridad, las formas de las fichas se imprimían sobre la superficie de la bola de arcilla. Esto podía ocurrir si, por ejemplo, un productor rural de textiles enviaba a un mercader de la ciudad un cargamento de telas. Con la mercancía le enviaba también una de estas bolas huecas rellena de las fichas que describían la mercancía enviada. Al recibir la mercancía, el mercader de la ciudad podía verificar la integridad del cargamento. Para el transportador era obligado entregar al mercader la bola intacta, con lo cual se veía obligado a preservar la integridad de la mercancía puesta bajo su responsabilidad. Como ha expresado Rudgley en su obra ya citada, esta práctica resultó crucial para el desarrollo de la escritura. Veamos por qué.

Una ficha introducida en la bola de arcilla *representa* un número. Por ejemplo el número de vacas que aparece en una transacción comercial. En la parte externa de la bola se imprime (mientras está blanda la arcilla) la forma de esa ficha. Quien está a cargo de la operación comercial *sabe*, observando la forma impresa, que adentro hay una ficha que representa una cantidad determinada, digamos, de vacas. Sabe que se trata de vacas y sabe además, cuántas son. Esa información la recibe de la impresión de la ficha sobre la superficie de la bola. Tuvo que ser evidente, en algún momento, que se estaba usando un sistema redundante. *ya no eran necesarias las fichas*: bastaba con su impresión sobre la arcilla. Entonces, esas impresiones pasaron a ser símbolos en sí mismos. Esos nuevos símbolos impresos tomaron entonces el papel protagónico: de ahora en adelante, para llevar las cuentas, era suficiente trabajar con los símbolos impresos sobre una superficie de arcilla plana. Es decir, sobre una tablilla.

El sistema de conteo había alcanzado así, un nuevo nivel de abstracción. Todo ello como resultado del problema que la presión social planteaba al sistema anterior de conteo. La respuesta permitió el acceso a un nuevo nivel de complejidad.

El sistema numérico en Babilonia, era sexagesimal, es decir, de base 60. Sin embargo, para escribir los dígitos entre el 1 y el 59 sólo se tenían dos signos, uno para representar el 1 y otro para representar el 10. No hace falta pensar mucho para comprender que esto introduce un nivel considerable de complejidad en la escritura numérica. Por ejemplo si usamos una T para indicar el 1 y un signo < para indicar el 10 (desde luego estos signos aparecen aquí con propósito explicativo y para mayor facilidad tipográfica) entonces el número 73 se escribiría: T < TTT. Esto recuer-

da la siguiente notación: 73 minutos los podemos representar así: 1 13 donde el primer 1 indica una hora (60 minutos) y luego escribimos los restantes 13 minutos. Hoy en día seguimos usando un sistema sexagesimal en nuestras mediciones del tiempo diario.

Más adelante, el sistema posicional con el cero —proveniente de la India— socializado por los árabes, introdujo una simplificación tal en la escritura de los números, que puede hablarse de una *democratización del sistema numérico*. El sistema indo-arábigo, como ha llegado a ser conocido, tiene una ventaja sobre otros sistemas que consiste en tener símbolos diferentes para cada uno de los dígitos del 1 hasta el 9. Entonces, la notación compuesta empieza a partir del número que representa la base, (en este caso el 10). La escritura posicional (es decir, cada dígito toma un valor según la posición en que se encuentra en la escritura del número) añade otro elemento de simplicidad a la notación. Todas estas características del sistema indo-arábigo, nos hacen pensar en el alto grado de abstracción que ya está presente en este sistema. Por un lado, los números, a diferencia de los primeros sistemas sumerios, están descontextualizados, es decir, son signos desprovistos de significados extra-sistémicos. Los únicos significados que se les puede atribuir provienen de las relaciones entre ellos en el interior del sistema. Por otra parte, los signos son convencionales —lo cual no significa que estén desprovistos de historia.

Al inicio de esta sección mencionamos que las tablillas contenían los símbolos correspondientes a las cantidades y dibujos que se refieren a las mercancías registradas en la tablilla. Esos dibujos son *signos que carecían de propósito fonético*. Son *ideogramas*, es decir, caracteres convencionales que representan

una determinada categoría (en este caso una cierta mercancía). Por ejemplo, un dibujo de una cabeza de vaca estilizada, es el símbolo convenido para referirse a las vacas.

Donald (*op. cit.*) hace una observación fina sobre las tablillas a las que nos estamos refiriendo: *permiten organizar listas por escrito*. Esto representa una ganancia considerable con respecto a las listas orales. Pensemos por ejemplo, que vamos al mercado y llevamos en la memoria la lista de lo que pensamos comprar. Seguramente el esfuerzo que tenemos que hacer para conservar la integridad de la lista ya no nos permite *procesar* la lista. En cambio si la lista está escrita, fácilmente podemos borrar de ella algún producto que pensábamos adquirir; podemos añadir otro, re-ordenar la lista, etcétera.

En estas primeras listas cuneiformes no hay todavía una escritura con estructura gramatical —lo cual aparecerá posteriormente. Pero ya esa estructura de lista es un avance considerable dentro del desarrollo de los sistemas externos de memoria. Hace viable un modo de procesamiento característico de estos soportes artificiales de la memoria.

Todo esto fue preparando el terreno para un cambio fundamental: la mente humana comenzó a reflexionar sobre los contenidos de sus propias representaciones, a manipularlas directamente como si ellas fueran cosas por sí mismas. Como veremos posteriormente, este proceso de *reificación* de las representaciones es de la mayor importancia desde un punto de vista epistemológico. Esta *realidad virtual* del número, le otorga una flexibilidad en su manejo, que no tendría si permanentemente nos tuviésemos que referir a un significado del número *por fuera del sistema numérico mismo*.

## 5.2 *Soportes de la memoria externa: la escritura y su complejidad*

Como parte de su desarrollo, las escrituras ideográficas alcanzaron un nivel de complejidad considerable. Tómese como ejemplo la escritura china que en cierto momento alcanzó la cifra monumental de 40 mil ideogramas. Sin duda, esta proliferación de ideogramas tuvo que introducir un nivel de complejidad muy alto para el aprendizaje de esta forma de escritura. La respuesta a tal complejidad en las grafías, consistió —lo cual es bastante natural— en buscar un mecanismo que la simplificara.

Las escrituras árabe, hebrea y la fenicia surgen hace unos 3500 años. En los siglos siguientes, los griegos adoptaron y adaptaron el alfabeto fenicio y dieron forma con ello, a las bases de los alfabetos de las lenguas indoeuropeas. El alfabeto fenicio de 22 consonantes fue transmitido a los griegos a través del contacto comercial. Los griegos le añadieron vocales y lograron diseñar el primer alfabeto fonético genuino. Vale la pena observar en este lugar, que las escrituras originales nacieron completamente separadas de la oralidad. Ver la escritura como una representación de la oralidad es resultado del alfabeto fonético.

## 5.3 *La escritura en Grecia*

¿Qué añadieron los griegos al empleo de la escritura? La pregunta es pertinente pues, hasta ese momento, la escritura había sido vista como una *tecnología de registro de datos*. Desde luego, como ya hemos dicho previamente, el registro escrito contiene la semilla de la sistematicidad en cuanto al manejo de la información.

La innovación crucial introducida por los griegos, fue el hábito de registrar sus ideas y

sus especulaciones. Introdujeron algo más que un recurso simbólico: *crearon el proceso de registro externo, de registro público, de los intercambios cognitivos*. Ponían sus ideas, incluso incompletas, a la consideración de los demás, para, de esta manera, ser mejoradas, refinadas aún en ausencia del autor original (Donald, 1992; Ong 1982).

No cabe duda que esta forma de transmisión es mucho más estable y permanente que la transmisión oral. Conviene recordar que las tradiciones orales hallaron en el mito la forma de transmisión que daba mayor grado de estabilidad a sus narraciones.

El pensamiento analítico inducido por la escritura, tiene entre sus características: el razonamiento formal, la inducción, la deducción, la verificación, la cuantificación y la idealización. *El producto más elevado de esta manera de pensar es la teoría*. Un recurso integrador que es mucho más que una invención simbólica: es un sistema de pensamiento y argumento que *predice y explica*.

## 6. *La cultura informática*

### 6.1 *De redes y personas: una analogía*

Podemos establecer una analogía entre una persona alfabetizada y una computadora puesta en una red. Por ejemplo, una que tenga acceso a Internet. Esa computadora tendrá entonces acceso a mucha información *que no reside en su disco duro*. La persona, por su parte, podrá tomar cualquier libro de su interés y tener entonces acceso a la información que se halla contenida en el libro. Si adquiere una copia del libro para su uso personal, esa información estará disponible para ella, *aunque no resida en su memoria biológica*.

Mejoremos un poco el ejemplo: imaginemos a esa persona *en red* con la biblioteca de su universidad. Entonces, saber leer le abre la oportunidad de acceder a un sistema de memoria externa representado por la biblioteca. Esto tiene un impacto considerable: la biblioteca, como base de datos, es accesible a quien posea el código para entrar (es decir, para quien sepa leer); aquellos que pueden entrar comparten una fuente de conocimiento codificado. En otras palabras, tienen acceso a un soporte común de memoria externa. La *cognición distribuida* (la cognición vista como una red que se activa mediante la comunicación entre las personas) entre ese grupo de personas rebasa a la de cualquiera de los miembros del grupo.

En el pasado, los conocimientos, las intuiciones, las visiones, fueron guardados en diversos soportes externos de la memoria, por ejemplo, en religiones, mitos, y tradiciones orales. La existencia de estos soportes externos, permitió posteriormente el acceso de muchas personas a las ideas contenidas en tales sistemas artificiales de la memoria.

Consideremos el ejemplo de una computadora con conexión a Internet. Las limitaciones propias de la computadora pasan a un segundo plano pues ahora la información que se halla en la red queda a disposición de los usuarios. Entonces, para describir las capacidades de la computadora resulta mejor referirnos a las capacidades de la red y no limitarnos a lo que la computadora puede hacer por sí misma, si la desconectamos de esa red.

*Los efectos estructurantes de la cultura y la tecnología sobre el individuo, terminan siendo los más importantes, ya que el individuo siempre está en red con los demás.*

La escritura implicó un cambio que llevó de lo meramente auditivo a lo visual (proyectó

el sonido sobre el espacio textual) y propició un redireccionamiento hacia medios no-biológicos para que sirvieran de soporte a los procesos mentales de razonamiento. Resulta pertinente concebir el desarrollo de la escritura desde la perspectiva de las capacidades semióticas de los seres humanos.

Las ideas, las opiniones, las teorías científicas, las novelas, etcétera, forman parte del mundo tanto como las cosas materiales. Usando una expresión contemporánea, diremos que el lenguaje nos permite la elaboración de un *universo virtual*. Desde luego, mediante la escritura se reafirma este proceso de creación de mundos que van más allá del mundo puramente físico. Esto es cierto tanto en las artes como en las ciencias. Es cierto tanto de las novelas como de las teorías científicas.

Los soportes externos de la memoria tienen efectos profundos sobre el *nivel funcional* de la memoria biológica que se ve transformada por la presencia de dichos soportes. Por ejemplo, la memoria de una persona está *conectada* a fotografías, diarios, anuarios escolares y muchos otros artefactos simbólicos coleccionados a lo largo de su vida.

## 6.2 Representaciones ejecutables

Desde una perspectiva cognitiva, el mayor desarrollo de la cultura teórica consiste en la aparición de un *soporte externo de la memoria*.

La memoria de corto plazo es como un recipiente de almacenamiento transitorio para los procesos mentales. No es, sin embargo, la parte del intelecto en donde se desarrolla la transformación de la información en conocimiento. Es la memoria externa la que, con mayor frecuencia, genera ese espacio de re-



flexión necesario para la transformación de la información.

Cuando una persona escribe un texto con papel y lápiz, ese producto sirve como objeto de reflexión para el escritor. Pero ¿ocurren cosas distintas cuando se escribe un texto utilizando un procesador de palabras? Uno puede, por ejemplo, usar el corrector de ortografía para revisar el texto; esta es una función que anteriormente estaba reservada a los seres humanos. La máquina no solo registra el pensamiento del escritor sino que *procesa la información* que queda registrada en ese medio de representación externa. Eso mismo ocurre cuando uno efectúa una operación aritmética con una calculadora, o cuando usa su agenda electrónica para recuperar un número telefónico.

Veamos otro ejemplo: cuando un científico usa un programa estadístico, introduce una serie de datos y el software los organiza en una representación gráfica. El científico puede interpretar esa gráfica y extraer conclusiones de ella. Pero no tiene que saber cuál fue el proceso que utilizó el software para generar la gráfica. Lo que importa entonces es su capacidad de decodificación frente al producto de la representación ejecutada.

En todas estas situaciones, la máquina está haciendo algo más que registrar información: está pasando de un sistema de representación a otro (de los datos numéricos que ha recogido el científico a la representación gráfica de los mismos) mediante la *ejecución* del primer registro de representación.

De modo que al usar una computadora, una persona no sólo tiene a su disposición un soporte de representación externa (como es un cuaderno) sino la posibilidad de someter y procesar esa información *de cierta manera* debido a la ejecutabilidad del sistema de re-

presentación que le suministra la máquina. *La máquina está externalizando un proceso cognitivo.*

Resulta interesante hacer notar que la manipulación a que podemos someter los objetos matemáticos en sus versiones electrónicas, ha ido generando un nuevo *realismo* matemático del que se puede sacar mucho provecho didáctico (Balacheff&Kaput, 1996). Las versiones electrónicas de los objetos matemáticos son como *objetos virtuales*. Pero esto no ocurre sólo con los *objetos* matemáticos. También podemos sentir la *materialidad* del texto escrito sobre la pantalla de una computadora de la siguiente manera: iluminamos unas líneas del texto, usando nuestro dedo virtual, es decir, el *ratón*. Luego de *cutar* esas líneas, las *pegamos* en otro lugar. Esta sencilla acción, ilustra cómo podemos tratar el texto como si fuera un objeto físico, aumentando con ello el *realismo* del texto escrito: se le puede *intervenir* como si fuera un objeto material.

Pero desde hace tiempo hay elementos que podemos designar como *virtuales* en la matemática clásica: ya indicamos anteriormente que cuando trabajamos con los números, es decir, con la notación decimal de los números, lo hacemos *como si esas notaciones fueran los números mismos*.

Eso es un desarrollo clave en las matemáticas: *trabajar con las representaciones como si ellas fueran el objeto* que se está explorando. Lo que ahora enfatizamos no es tan sólo la presencia de un elemento virtual sino la *ejecutabilidad* de los sistemas de representación y con ello, la nueva dimensión que alcanza la virtualidad de los objetos bajo las nuevas formas de manipulación.

Las consideraciones anteriores permiten extraer la siguiente conclusión: los medios com-

putacionales están contribuyendo a la generación de una nueva cultura basada en la ejecutabilidad de procesos algorítmicos muy generales. Para ello, ha sido central la capacidad de trasladar a los lenguajes de programación los algoritmos que controlan las transformaciones de sistemas formales, como la aritmética y como nuestro sistema de escritura.

La tecnología informática permite generar sistemas de representación ejecutables mediante los cuales se logra instalar aspectos de nuestro pensamiento en soportes semióticos fácilmente reproducibles. Dichos soportes, gradualmente, se tornan parte de nuestro pensamiento —como cuando resolvemos un problema aritmético mediante el uso de la representación decimal de los números. Esta forma de representar los números se ha tornado tan familiar para nosotros, que ya no somos conscientes de que cuando realizamos una suma, por ejemplo, ese sencillo acto cognitivo depende del sistema de representación y no es tan *puro*, en términos cognitivos, como suele pensarse. De manera que la suma no la hacemos *nosotros*, sino *nosotros ayudados por el sistema decimal* de representación de los números. Podemos incluso, hacer una referencia histórica de mucha importancia sobre nuestro ejemplo del sistema decimal: los cálculos astronómicos llevados a cabo durante el renacimiento, se pudieron realizar gracias a las tablas de logaritmos, que dependen sustancialmente del sistema decimal.

Es central observar que los sistemas de representación no sólo sirven para registrar datos sino para ampliar la capacidad de procesamiento de la mente humana. Al instalarlos en soportes ejecutables potenciamos la capacidad de procesamiento a nuestra disposición: no somos ya nosotros auxiliados por un siste-

ma de representación sino nosotros y nuestro nuevo socio cognitivo: la computadora.

### 6.3 *La cultura virtual*

Vivimos inmersos en un mundo sociocultural que es resultado de la consolidación de los sistemas de representación asociados a la visualización y la escritura. De allí han surgido el pensamiento científico, las artes plásticas y muchos otros valores culturales de nuestras sociedades. El cine, la música (grabada), las caricaturas; los sistemas de representación de las ciencias, que solemos llamar *lenguajes especializados*, son todos ellos ejemplos de la capacidad puesta a nuestra disposición por los sistemas de representación externa. Actualmente, la capacidad de los sistemas de representación se ha visto incrementada por la capacidad de procesamiento que se controla desde los instrumentos computacionales.

Vale la pena traer a la discusión sobre la *realidad virtual* muchas de las formas que ésta ha tomado en el pasado. Esto es pertinente para desalojar a la expresión de la carga negativa que sugiere: realidad virtual como realidad artificial, alejada de nosotros. Y entonces surge la pregunta: ¿para qué dedicar esfuerzos a una realidad virtual, cuando tenemos ante nosotros LA realidad real? Sin embargo, esta manera de interpretar la realidad virtual es equivocada. Veamos por qué.

La historia que hemos narrado en las primeras secciones de este escrito, muestra de manera fehaciente, que la intervención de los humanos en el mundo ha tenido como consecuencia la *humanización* de ese mundo. Para nosotros *el mundo* es esencialmente el mundo cultural, humanizado mediante el cúmulo de transformaciones que hemos efectuado sobre él, mediante nuestras herramientas. Nos referimos a herramientas tanto

materiales como simbólicas. Vale la pena resaltar que, desde sus comienzos, la construcción de herramientas comportó un cambio en la visión del mundo: el mundo se visualizó como objeto de las transformaciones realizadas mediante dichas herramientas. De allí que esos esfuerzos de transformación lo hayan humanizado. Frente al mundo natural, hemos construido un mundo virtual, justamente nuestro mundo sociocultural.

No tiene sentido hablar de *humanizar las tecnologías*: éstas son profundamente humanas. De lo que se trata es de *socializarlas*.

Cuando, como resultado de la evolución, los humanos pudieron referirse a sus sueños de la noche anterior se estaban refiriendo a sucesos virtuales. En efecto, ¿dónde habían tenido lugar esos sueños? De la misma forma cuando uno se refiere a los recuerdos, accede a un mundo virtual, que para nosotros tiene un grado de realidad comparable a aquello que ocurre ante nuestros ojos.

La novela es un mundo virtual hecho posible por la escritura. De manera que la virtualidad, como parte de nuestro mundo, no es algo de nuevo cuño. Ha estado con nosotros desde hace ya bastante tiempo. Sólo que estas realidades nos son tan *naturales* que difícilmente aceptaremos, sin pensarlo, calificarlas de virtuales. Y ¿qué decir de la realidad creada por el teléfono? ¿O la creada por la radio, por la televisión? Todas son resultado de tecnologías que ya se han tornado invisibles en el seno de nuestras sociedades. Invisibilidad: rasgo de las tecnologías, que no es otro que el reconocimiento, casi siempre tácito, de que algo extraño a nosotros mismos, se ha tornado natural.

En su obra, *De la Ceca a la Meca*, el escritor Juan Goytisolo nos dice: *Hubo un tiempo en el que lo real y lo imaginario se confundían,*

*los nombres suplantaban a las cosas y las palabras inventadas se asumían al pie de la letra y se concebían como seres de carne y hueso* (citado en Carbonell & Sala, 2000). ¿Cuál es ese mundo actualmente? Es un mundo quizás en extinción, pero no a causa de la digitalización sino de la escritura. Es el mundo de los juglares, que cede su espacio al mundo de la escritura, más universal y más eficaz para comunicar las ideas a través del tiempo y del espacio.

A fuerza de interiorizar las acciones y tentativas físicas, vamos generando modelos simbólicos a los cuales la escritura suministra soportes físicos de representación que permiten algo extraordinario: la capacidad de previsión. Esto forma parte, indudablemente, de la base del éxito evolutivo de nuestra especie.

#### **6.4 Consideraciones finales sobre la tecnología**

La forma de emplear la tecnología pasa, inicialmente, por un proceso de amplificación y, posteriormente, por un proceso más complejo, de reorganización. La amplificación puede traducirse así: *hacer lo de antes, pero mejor*. La re-organización como: *hacer nuevas cosas y reorganizar las anteriores en función de las nuevas posibilidades*.

Por ejemplo, al automóvil se le llamó, en sus comienzos, *coche sin caballos*. Fue un nombre efímero pero suficiente para reflejar la actitud de ese tiempo hacia la tecnología del transporte. Una actitud que procuraba asimilar el nuevo medio de transporte a otro producido por una tecnología anterior. El automóvil era concebido como un tipo diferente de coche, pero en el fondo seguía siendo un coche. Las expectativas sobre el automóvil equivalían a las expectativas sobre un proce-



so de *amplificación* (es decir, a una mejora del medio de transporte). Más adelante, se produjo un cambio de actitud: los automóviles empezaron a ser vistos como algo nuevo *para algo distinto*. Esto implica la existencia de nuevas categorías de referencia, nuevos patrones estéticos, etc.

Una idea muy difundida sobre la tecnología consiste en verla como un medio para la superación de las limitaciones que la naturaleza impone a las personas. Es decir, la tecnología se ve como una prótesis para reforzar el dominio sobre la naturaleza. Esto es parcialmente correcto, pero hay un efecto más sutil, más profundo, que las tecnologías producen sobre una sociedad: *La tecnología es un principio estructurador*. En los centros urbanos, la vida cotidiana gira en torno a los productos tecnológicos: el transporte, la comunicación telefónica, los medios impresos, la televisión y un sinnúmero de instrumentos que, de maneras explícitas e implícitas, moldean nuestra percepción de ese entorno urbano hasta el punto de hacerse inseparable de él.

La invención de la imprenta (a mediados del siglo XV) puso en marcha una revolución social cuya onda expansiva llega hasta nuestros días. Pero mucho antes, las pinturas en las rocas habían cedido el paso a las tablillas de barro húmedo sobre las cuales se imprimían a presión los caracteres cuneiformes; luego de la cerámica vinieron las pieles de animales marcadas con textos y más tarde los rollos de papiro. Para el año 100 de la era cristiana ya había aparecido el código, pero no fue sino hasta el siglo IX cuando se produjo el primer libro verdadero de papel.

Podemos ver la imprenta como la continuación de un desarrollo tecnológico que ya no se especializa en generar instrumentos auxiliares para la actividad del cuerpo (herramientas para aumentar la potencia física), o que se proponen el control del entorno físico inmediato (por ejemplo, sacar ventaja del viento en la navegación). En una primera instancia, la tecnología asociada a la imprenta, se propone amplificar la capacidad de difusión de un texto, pero termina impactando los estilos cognitivos mismos. De manera importante, genera un campo de memoria externa cada vez mejor estructurado.

El microscopio y el telescopio, ya desde el siglo XVII, marcan un momento histórico de clara convergencia entre la ciencia y la tecnología. Resulta imposible pensar en la astronomía contemporánea, por ejemplo, al margen de sus instrumentos de observación —a partir del telescopio de Galileo.

Entre el astrónomo y el planeta, ¿cuál es el instrumento de mediación? Hasta Tycho Brahe, el instrumento es el ojo del astrónomo sin más. Luego, la mediación la encarna el telescopio. La historia de la disciplina está registrada en la historia de la evolución de ese instrumento. Es claro que *el objeto de la observación cambia cuando cambia el instrumento mediador y, en consecuencia, cambia el conocimiento producido*. Del microscopio, puede decirse algo análogo.

Los efectos de la tecnología no los hallamos solamente en la naturaleza sino también en las organizaciones sociales. Sin ir más lejos, podemos ilustrar esta situación mediante los efectos del reloj en las sociedades. Dicho instrumento transforma las relaciones de los ciudadanos con el tiempo de su cotidianidad. Para esos ciudadanos, el tiempo no está hecho solamente de instantes sino también de minutos, de horas, de años, de ciclos escolares, etc. Los instrumentos mediadores han dejado allí su huella indeleble.

El siglo XIX fue pródigo en *tecnologías informáticas*. Entre 1850 y 1900 se sentaron las bases para el desarrollo del telégrafo, del teléfono, del fonógrafo, de la radio y de otras tecnologías, que constituyen antecedentes fundamentales de las modernas tecnologías audiovisuales (desarrolladas durante el siglo XX) y de la Internet.

En las discusiones sobre las tecnologías de hoy, tendemos a ver como productos tecnológicos solo aquellos que han sido desarrollados durante nuestro tiempo. Se cree que las computadoras son tecnología pero el lápiz, el papel, el bolígrafo, los libros, el signo =, el pizarrón, el alfabeto, no lo son... Pero en realidad sí lo son: son tecnologías inventadas por el ser humano para servir de *amplificadores* y *re-organizadores* a su cognición. Si adoptamos este punto de vista entonces la computadora pierde ese aire de instrumento *extraño* con el cual la vemos y pasa a formar parte de un proceso natural de desarrollo sociocultural.

## Referencias

- Balacheff, N., Kaput, J.** (1996), *Computer-based learning Environment in Mathematics*, en A. Bishop et al. (eds) *International Handbook of Mathematics Education*, Kluwer Academic Publishers.
- Bloom, H.** (2000). *Global Brain: The Evolution of Mass Mind from the Big Bang to the 21st Century*. John Wiley & Sons, New York.
- Brunner, J.** (1995). *Desarrollo Cognitivo y Educación*. Ediciones Morata, segunda edición, Madrid.
- Carbonell, E., Sala, R.** (2000). *Planeta Humano*, Ed. Península, Barcelona.
- Donald, M.** (1992). *Origins of the Modern Mind*, Harvard Univ. Press, Cambridge, MA.
- Guedj, D.** (1996). *L'empire des Nombres*. Colección Decouverts, Gallimard, Francia.
- Ifragh, G.** (2000). *The Universal History of Numbers: From Prehistory to the Invention of the Computer*.
- Kozulin, A.** (1994). *La Psicología de Vygotsky*. Alianza Editorial, Madrid.
- Ong, W.** (1999). *Oralidad y Escritura*, Fondo de Cultura Económica (FCE), México.
- Rabardel, (1995).** *Les Hommes et les Technologies*, Armand Colin, Paris.
- Rubia, F.** (2000). *El cerebro nos engaña*, Temas de Hoy, Madrid, España.
- Rudgley, (2000).** *Los pasos lejanos*, Grijalbo, Barcelona.
- Stringer, C., McKie, R.** (1997). *African Exodus: The Origins of Modern Humanity*. Henry Holt & Company, Inc.